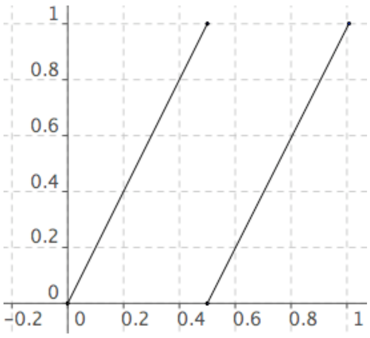
Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen
Dr. Reimund Albers

Wintersemester 2008/09

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

10. Übung: Teilbarkeit von Binomialkoeffizienten

Präsenzübungen für Mittwoch, 14.1.



Geben Sie zur grafisch dargestellten Funktion den Funktionsterm an (abschnittsweise definiert)
Iterieren Sie $x_0 = 0{,}1$.
Geben Sie 0,1 im Zweiersystem an. Erläutern Sie damit den Orbit der Iteration.
Erläutern Sie, welchen Orbit die Iteration hat, die mit $x_0 = 0{,}1\overline{001}_2$ startet. Berechnen Sie die wesentlichen Zahlen im Zehnersystem. Zeichnen Sie grafische Iteration.

Hausübungen, Abgabe Montag, 19.1.2009

1. Zeichnen Sie den Funktionsgraph zu

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x-3) & \text{für } x \le 3 \\ 2(x-3) & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$

   a. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Fixpunkte. Welche Charakteristik hat die Iteration in der Nähe der beiden Fixpunkte? (attraktiv/repulsiv, treppen-/spiralförmig)
   b. Geben Sie die Menge aller Startwerte an, für die der Orbit der Iteration auf den attraktiven Fixpunkt zuläuft.

2. Das Heronverfahren zur Bestimmung einer Quadratwurzel aus einer Zahl w ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{w}{x_n}\right)$$

. Der Startwert x_0 darf eine beliebige, positive Zahl sein.

   a. Ermitteln Sie die Funktion f, mit der hier iteriert wird.
   b. Zeichnen Sie den Funktionsgraph (ggfs. mit dem Computer) für x > 0. Wählen Sie 2 cm für eine Einheit.
   c. Führen Sie das Verfahren für $w = 2$ und $x_0 = 1$ durch. Rechnen Sie bis x_4 in reiner Bruchrechnung. Führen Sie die Iteration zeichnerisch durch.
   d. Schreiben Sie zu $\sqrt{2}$ die Kettenbruchentwicklung auf.
   e. Berechnen Sie aus der Kettenbruchentwicklung die ersten 8 Näherungsbrüche. (*Tut mir leid, ist eine recht sture Fleißarbeit. Holen Sie sich dazu so viel Rechnerhilfe, wie Sie selbst beherrschen.*)
   f. Vergleichen Sie die Brüche aus dem Heronverfahren (Teil c.) mit den Brüchen der Kettenbruchentwicklung. Was fällt auf? Was kann man vermuten?

g. Berechnen Sie für die in a. ermittelte Funktion den Fixpunkt (für allgemeines w).
h. Ermitteln Sie, ob der Fixpunkt attraktiv oder repulsiv ist, indem Sie die Tangentensteigung im Fixpunkt ermitteln (Differentialrechnung).
i. Erläutern Sie aus dem Blickwinkel der Iteration an Funktionen, warum das Heronverfahren ein Verfahren ist, die Quadratwurzel zu berechnen und warum es ein so schnelles Verfahren ist.

Um die dritte Wurzel zu berechnen, ist ein analoges Verfahren $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{w}{x_n^2}\right)$. Wieder darf der Startwert x_0 eine beliebige, positive Zahl sein.

j. Geben Sie die Funktion k an, mit der hier iteriert wird.
k. Berechnen Sie analog zu g. den Fixpunkt.
l. Ermitteln Sie, ob der Fixpunkt attraktiv oder repulsiv ist, indem Sie die Tangentensteigung im Fixpunkt ermitteln (Differentialrechnung).
m. Erläutern Sie aus dem Blickwinkel der Iteration an Funktionen, warum die Iteration mit k ein Verfahren ist, die 3.Wurzel zu berechnen. Warum ist es nicht so günstig wie das Heronverfahren für die Quadratwurzel? Wie könnte das Verfahren aus dem Blickwinkel der Iteration an Funktionen verbessert werden?