Übung 10

Aufg. 1:

a) $\mu_3(95!) = \left\lfloor \frac{95}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{95}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{95}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{95}{81} \right\rfloor$

$= 31 + 10 + 3 + 1 = 45$

95! enthält 3^{45} in der PFZ.

$\mu_5(95!) = \left\lfloor \frac{95}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{95}{25} \right\rfloor = 19 + 3 = 22$

95! enthält 5^{22} in de PFZ.

$\mu_{11}(95!) = \left\lfloor \frac{95}{11} \right\rfloor = 8$ 95! enthält 11^8 in der PFZ.

b) Satz

$$\mu_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

$S_p(n)$ ist die Quersumme von n, dargestellt im p-adischen System

$n = p^k \Rightarrow p^k = 1\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ Nullen}} \Rightarrow S_p(p^k) = 1$

Einsetzen

$$\mu_p((p^k)!) = \frac{p^k - 1}{p-1} \quad \square$$

c) $73_{10} = 1001001_2$
$16_{10} = 10000_2$ $\rightarrow$ 2 Überträge: $2^2 \mid \binom{73}{16}$

$73_{10} = 2201_3$
$16_{10} = 121_3$ $\rightarrow$ 1 Übertrag: $3 \mid \binom{73}{16}$

$73_{10} = 243_5$
$16_{10} = 31_5$ $\rightarrow$ 0 Übertrag: $5 \nmid \binom{73}{16}$

2 a) Man muss bei der Ergänzung von k zu n 4 Überträge im 3er System konstruieren

243	81	27	9	3	1	
	1	1	0	0	0	$n = 108 > 100$
		1	0	0	1	$k = 28$

Dann ist $\binom{108}{28}$ durch 3^4 teilbar

b) Das minimale n ist $n = 81$

81	27	9	3	1	
1	0	0	0	0	← darf nicht 0 sein

$\binom{81}{1}\binom{81}{2}\binom{81}{4}\binom{81}{5}\binom{81}{7}\ \ldots$ sind durch 3^4 teilbar.

3a. Der Gesamtstruktur entnimmt man, dass n in der Nähe von $7^3 = 343$ liegt.

schwarze Linie

Für alle k mit $0 \leq k \leq n$ ist $\binom{n}{k}$ nicht durch 7 teilbar $\Rightarrow$ es gibt für alle k niemals einen Übertrag bei der Ergänzung zu n

$\Rightarrow$ n hat nur 6 in der 7er-Darstellung

$\Rightarrow n = 666_7 = 7^3 - 1 = 342$

Dann ist für $n = 7^3$ jedes $\binom{n}{k}$ mit $1 \leq k \leq 342$ durch 7 teilbar, da es bei der Ergänzung von k nach n immer mindestens einen Übertrag gibt.

3b. Von der Gesamtstruktur ist n in der Nähe von $2 \cdot 7^3 = 686$

Für $n = 1666_7 = 685_{10}$ kommt es für alle k mit $0 \leq k \leq 685$ nie zu einem Übertrag. $\binom{685}{k}$ ist also für alle k nicht durch 7 teilbar.

Die nächste Zeile hat dann $n = 686_{10} = 2\,000_7$

Hier gibt es für $k = 1000_7 = 343_{10}$ keinen Übertrag. Das ist gerade die Mitte der Zeile

c. ~~D~~ $n = 1466_7 = 587_{10}$

Für $0 \leq k \leq 466_7 = 244_{10}$ kommt es zu keinen Überträgen bei der Ergänzung zu n

Für $500_7 = 245 \leq k \leq 666_7 = 342_{10}$ kommt es zu ~~wo~~ genau einem Übertrag.

Für $1000_7 = 343_{10} \leq k \leq 1466_7 = 587$ kommt es zu keinem Übertrag.

Also

0	244	343	587	10er
0000	466	1000	1466	7er