Blatt 9

1. Aufgabe:

„Schneeflocke": $k = 3$, da 3 Elemente in der Diagonalen (also in der größten Ausdehnung)

$$G_3 = 7 \cdot G_1$$

$$\Rightarrow \quad 3^D = 7 \qquad \text{mit } D = \text{Selbstähnlichkeitsdim.}$$

$$\Leftrightarrow \quad D = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,7712$$

„Dreiecks-Gebilde": keine Selbstähnlichkeit vorhanden

„Kreuz": $k = 3$

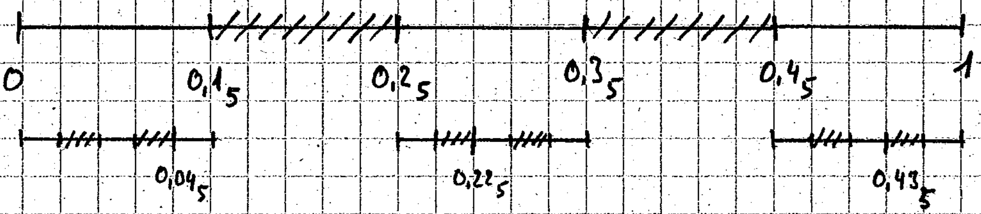
$$G_3 = 5 \cdot G_1$$

$$\Rightarrow \quad 3^D = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad D = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1,465$$

2. Aufgabe:

a) Intervall $[0;1]$



//// – wird weggewischt, und zwar als nach links abgeschl. Intervall.

Im ersten Schritt wird also das Intervall $[0,1_5 ; 0,2_5)$ und das Intervall $[0,3_5 ; 0,4_5)$ weggewischt.

b) $k = 5$

$$G_5 = 3 \cdot G_1 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\log 3}{\log 5} \approx 0,683$$

3. Aufgabe: Primfaktorzerlegung von 123!

a) $123! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 121 \cdot 122 \cdot 123$

- $\mu_2(123!) = \left\lfloor \frac{123}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{2^6} \right\rfloor + \ldots$

$$= 61 + 30 + 15 + 7 + 3 + 1 + 0 + 0 \ldots$$

$$= 117$$

Der Primfaktor 2 taucht also 117 mal auf, d.h. 2^{117} teilt 123!.

- $\mu_3(123!) = \left\lfloor \frac{123}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{81} \right\rfloor$

$$= 41 + 13 + 4 + 1$$

$$= 59$$

Der Primfaktor 3 taucht also 59 mal auf.

- $\mu_5(123!) = \left\lfloor \frac{123}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{123}{125} \right\rfloor$

$$= 24 + 4 + 0$$

$$= 28$$

Der Primfaktor 5 taucht 28 mal auf.

b) Der größte Primfaktor der 2 mal auftaucht ist 61.

Beweis: $\mu_{61}(123!) = \left\lfloor \frac{123}{61} \right\rfloor = 2$.

Die nächstgrößere PZ ist 67 und $\mu_{67} = \left\lfloor \frac{123}{67} \right\rfloor = 1$, sie taucht also nur einmal auf.

4. Aufgabe:

a) $\binom{74}{23} = \frac{74!}{23!\,51!}$

$\binom{n}{k}$ ist durch p teilbar, wenn p in $n!$ öfter vorkommt als in $k!$ und $(n-k)!$ zusammen

$$\mu_2(74!) = \left\lfloor \frac{74}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{74}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{74}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{74}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{74}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{74}{64} \right\rfloor$$

$$= 71$$

$$\mu_2(51!) = 47$$

$$\mu_2(23!) = 19$$

$$\mu_2(74!) = 71 > 47 + 19 = \mu_2(51!) + \mu_2(23!)$$

Und es gilt $\mu_2\left(\binom{74}{23}\right) = \mu_2(71!) - \mu_2(51!) - \mu_2(23!) = 5$

Der Primfaktor 2 taucht also 5 mal auf.

b) Test mit Überträgen

Wandle zunächst 23 und 51 ins 2-er System um, addiere die beiden Zahlen und zähle dann die Überträge.

$k = 23_{10} = 10111_2$

$n-k = 74-23 = 51_{10} = 110011_2$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ +\,110011_2 \\ \hline 1001010_2 \end{array}$$

→ wir erhalten also 5 Überträge,

d.h. $\binom{74}{23}$ ist durch 2 teilbar

und die 2 taucht 5 mal in der

Primfaktorzerlegung auf.