7. Übung

1. Aufgabe: Pascalsches Dreieck

Behauptung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Beweis: mit vollständiger Induktion.

Vorbemerkung $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1 \quad \checkmark$$

Induktionsbehauptung:

Beh. gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluß: $n \longmapsto n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{n} \\
&= 2^n + 0 \qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n} \\
&= 2^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2^n + 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

$\square$

2. Aufgabe DIN A 4 Format

Berechnung der Größe eines DIN A 4 Blattes

Berechne zunächst das Seitenverhältnis von Länge l_0 zu Breite b_0 eines DIN A 0 Blattes:

Wir haben in jedem Schritt zueinander ähnliche Rechtecke, als gilt

$$\frac{l_n}{b_n} = \frac{l_{n-1}}{b_{n-1}} \quad \text{und} \quad l_n = b_{n-1}$$
$$b_n = \frac{1}{2} l_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{l_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{b_{n-1}}{\frac{1}{2} l_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad l_{n-1}^2 = 2 b_{n-1}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad l_{n-1} = \sqrt{2}\, b_{n-1}$$

Also haben wir ein Seitenverhältnis von $1 : \sqrt{2}$, damit gilt für DIN A 0

$$l_0 \cdot b_0 = 1\,m^2 \quad \text{und} \quad l_0 = \sqrt{2}\, b_0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2}\, b_0^2 = 1\,m^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0 = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,m \quad \text{und} \quad l_0 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,m = \sqrt{\sqrt{2}}\,m$$

Nun können wir die Seiten vom DIN A 4 Blatt berechnen

$$l_1 = b_0 = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,m$$

$$l_2 = b_1 = \frac{1}{2} l_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}}\,m$$

$$l_3 = b_2 = \frac{1}{2} l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,m$$

$$l_4 = b_3 = \frac{1}{2} l_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\sqrt{2}}\,m \approx 29{,}73\,cm$$

$$b_4 = \frac{1}{2} l_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,m \approx 21{,}023\,cm$$

$\square$

3. Aufgabe:

a) Zunächst zeigen wir, dass M die Strecke $\overline{M_aB}$ halbiert:

M_c halbiert die Strecke $\overline{AB}$

mit Strahlensatz gilt $\quad \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = \frac{\overline{M_aM}}{\overline{MB}}$

Also halbiert M auch die Strecke $\overline{M_aB}$.

Durch erneutes Anwenden des Strahlensatzes erhält man

$$\frac{\overline{CM_a}}{\overline{M_aM}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SM_c}} = \frac{2}{1}$$

Also gilt: S teilt die Seitenhalbierende $\overline{CM_c}$ im Verhältnis $2:1$.

$\square$

b) Zur Berechnung der Dreiecksflächen benötigen wir Grundlinie und Höhe der Dreiecke.

Als Grundlinie nehmen wir die Strecken $\overline{AM_c}$ und $\overline{M_cB}$, die nach Konstruktion gleich sind

Als Höhe nehmen wir den Abstand zwischen der Linie $\overline{AB}$ und C, also die gleiche Höhe für beide Dreiecke.

Damit ist die Fläche der Dreiecke $= \frac{1}{2} g \cdot h$ identisch.

$\square$

c) Auch hier benutzen wir wieder die Strahlensätze.

Dadurch erhalten wir:

$$\frac{\overline{CS}}{\overline{SM_c}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}$$

Aus Aufgabenteil a) wissen wir $\quad \frac{\overline{CS}}{\overline{CM_c}} = \frac{2}{3}$

und dank der Strahlensätze gilt

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{CM_c}} = \frac{2}{3} \quad .$$

Damit haben wir für jede Strecke einen Streckungsfaktor von $\frac{2}{3}$. Bei der Berechnung der Fläche erhalten wir also einen „Streckungsfaktor" von $\frac{4}{9}$.

Man kann dies auch direkt ausrechnen:

Sei A_1 die Fläche des Dreiecks CDE

A_2 — " — CAB

und g_i, h_i, $i \in \{1,2\}$ die zugehörigen Grundlinien bzw. Höhen.

Es gilt dann $g_1 = \frac{2}{3} g_2$ und $h_1 = \frac{2}{3} h_2$

$$A_1 = \frac{g_1 \cdot h_1}{2} = \frac{\frac{2}{3} g_2 \cdot \frac{2}{3} h_2}{2} = \frac{4}{9} \, \frac{g_2 \cdot h_2}{2}$$

$$= \frac{4}{9} \cdot A_2 .$$

Das Dreieck wird also nicht in 2 gleich große Teile geteilt.

$\square$

Man kann auch die beiden Flächen ausrechnen und erhält dann für das Trapez $DEBA$

$$A_{T_{DEBA}} = \frac{5}{4} A_1 .$$

$\square$

4. Aufgabe frierende Kugeln

Kugelvolumen : $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$

Kugeloberfläche: $O = 4\pi r^2 = \pi d^2$

a) $d = 2\,\text{cm}$

$$V = \frac{\pi}{6}(2\,\text{cm})^3 = \frac{\pi}{6}\,8\,\text{cm}^3$$

Oberflächenschicht:

$$V_O = \frac{\pi}{6}(2\,\text{cm})^3 - \frac{\pi}{6}(\underbrace{1{,}8}_{\text{„}d-0{,}2\text{"}}\,\text{cm})^3$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(8\,\text{cm}^3 - 6{,}832\,\text{cm}^3\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\,2{,}168\,\text{cm}^3$$

Verhältnis der Oberflächenschicht zum Gesamtvolumen:

$$\frac{V_O}{V} = \frac{\frac{\pi}{6}\,2{,}168\,\text{cm}^3}{\frac{\pi}{6}\,8\,\text{cm}^3} = \frac{2{,}168}{8} = 0{,}271$$

Also beträgt die Oberfläche 27,1 % des Gesamtvolumens.

b) analog zu Teil a) nur mit $d = 6\,\text{cm}$.

Damit erhält man für die ausstrahlende Oberfläche 9,67 % des Gesamtvolumens.

c) In diesem Aufgabenteil macht es Sinn, mit einer Linearisierung für die Oberflächenschicht zu arbeiten, d.h. wir multiplizieren die Oberflächenformel mit der Schichtdicke. Bei sehr kleinen Kugeln führt dies zu einem größeren Fehler als bei großen Kugeln (im Verhältnis zur Schichtdicke gesehen).

Sei nun s die Dicke der Schicht, dann erhalten wir für die Oberflächenschicht O

$$O = \pi 4 d^2 \cdot s$$

In unserem Fall gilt

$$V_0 = \frac{\pi}{6} d_0^3 \quad \text{und} \quad O_0 = \pi 4 d_0^2 s$$

mit $$p_0 = \frac{O_0}{V_0} = \frac{4\pi d_0^2 s}{\frac{\pi}{6} d_0^3} = \frac{24 d_0^2 s}{d_0^3} = \frac{24 s}{d_0}$$

betrachten wir nun $d = k d_0$, so erhalten wir

$$V = \frac{\pi}{6} k^3 d_0^3 \quad , \quad O = 4\pi k^2 d_0^2 s$$

und $$p = \frac{O}{V} = \frac{4\pi k^2 d_0^2 s}{\frac{\pi}{6} k^3 d_0^3}$$

$$p = \frac{24 s}{k d_0} = \underline{\underline{\frac{1}{k} p_0}}$$

Rechnet man mit der exakten Oberflächenschicht, so erhält man ein nicht so klares Ergebnis.

d) Kinder haben aufgrund ihres geringeren Gesamtvolumens verhältnismäßig mehr Oberfläche als ein Erwachsener, kühlen also schneller aus.