6. Übung

1. Aufgabe: Wurzel in Kettenbruch

$$\sqrt{6} = 2 + (\sqrt{6} - 2)$$

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{6}-2}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + (\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1)}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{6} - 2)}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$$

NR:

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{6 - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + 1$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6} + 1}{\frac{1}{\cancel{4}_{2}} \cdot \cancel{6}^{3} - 1}$$

$$= \sqrt{6} + 2$$

$$= 4 + (\sqrt{6} - 2)$$

→ damit hat man wieder den Ausdruck vom Anfang, also eine Wiederholung.

Damit gilt: $\sqrt{6} = [2; \overline{2\ 4}]$

2. Aufgabe periodischer Kettenbruch in Zahl

$$[2;\overline{14}] = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}$$

also $$x = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\boxed{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}} = \cfrac{1}{\cfrac{2+x+1}{2+x}} = \frac{2+x}{3+x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 = \frac{2+x}{3+x} \qquad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+3) = 2+x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+3x-2x-6 = 2+x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \quad -6 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \quad = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{8} \text{, da } x > 0 .$$

Also gilt $[2;\overline{14}] = \sqrt{8}$

4. Aufgabe

Das Rechteck CBDE ist ähnlich zu dem Rechteck MBJL

gesucht: Länge der Strecke $\overline{RP}$

setze die Länge der Strecke $\overline{RS}$ gleich 1.

$x := |\overline{RP}|$ und es gelte $|\overline{RS}| = 1$

Damit erhalten wir für die anderen Strecken:

$$|\overline{QP}| = |\overline{RP}| - |\overline{RQ}|$$
$$= x - |\overline{RS}| = x - 1$$

$$|\overline{LM}| = |\overline{QM}| - 2 \cdot |\overline{QP}|$$
$$= |\overline{RS}| - 2(x-1) = 3 - 2x$$

$$|\overline{KJ}| = |\overline{LJ}| - |\overline{LK}|$$
$$= |\overline{QP}| - |\overline{LM}| = 3x - 4$$

$$|\overline{EC}| = |\overline{KC}| - 3|\overline{KI}|$$
$$= |\overline{LM}| - 3|\overline{KJ}| = 15 - 11x$$

CBDE ist ähnlich zu MBJL, also gilt:

$$\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{DB}|}{|\overline{BJ}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{KJ}|}{|\overline{QP}|} = \frac{|\overline{EC}|}{|\overline{LM}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x-4}{x-1} = \frac{15-11x}{3-2x}$$

$$(3x-4)(3-2x) = (15-11x)(x-1)$$

$$17x - 6x^2 - 12 = 26x - 15 - 11x^2$$

$$-9x + 5x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{3}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{21}{100}}$$

Die gesuchte Strecke beträgt $|\overline{RP}| = \frac{9}{10} + \frac{\sqrt{21}}{10}$, da $x_2 < 1$ als Lösung nicht in Frage kommt.