5. Übung: Kettenbrüche und Euklidischer Algorithmus

1. Aufgabe:

$$[a; b, c, d, e] = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}$$

$$= a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{e}{de+1}}}$$

$$= a + \cfrac{1}{b + \cfrac{de+1}{cde+c+e}}$$

$$= a + \frac{cde + c + e}{bcde + bc + be + de + 1}$$

$$= \frac{abcde + abc + abe + ade + a + cde + c + e}{bcde + bc + be + de + 1}$$

2. Aufgabe:

Bezeichne die Kantenlängen der Quadrate immer mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben.

setze $k := 1$

dann gilt:

$$c = g + 1$$

$$d = c + 1 = g + 2$$

$$e = d + 1 = g + 3$$

$$h = e + 1 - g = g + 3 + 1 - g = 4$$

$$f = h + e = 4 + e = g + 7$$

$$a = f + h = g + 7 + 4 = g + 11$$

$$b = c + g = 2g + 1$$

Löse nun zunächst nach g auf.

$$g = a - b + h = g + 11 - 2g - 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad g = -g + 14$$

$$\Leftrightarrow \quad g = 7$$

einsetzen gibt dann: $a = 18$, $b = 15$, $c = 8$,
$d = 9$, $e = 10$, $f = 14$,
$(g = 7,\ h = 4)$

Für das Rechteck gilt: Länge $= a + b = 33$, Breite $= a + f = 32$.

<u>3. Aufgabe:</u> Euklidischer Algorithmus

$$ggT(89, 55) = ?$$

$$89 = 1 \cdot 55 + 34$$
$$55 = 1 \cdot 34 + 21$$
$$34 = 1 \cdot 21 + 13$$
$$21 = 1 \cdot 13 + 8$$
$$13 = 1 \cdot 8 + 5$$
$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$
$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 1 \cdot 1 + 1$$

Mit dem Durchführen des euklid. Algorithmus erhält man von 89 ausgehend die Fibonacci-Zahlen in rückwärtiger Reihenfolge. Dies liegt daran, dass 89 und 55 zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen sind.

4. Aufgabe:

b.) **Beh:** es existieren keine drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass

$$a = b + c \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{gilt.}$$

Beweis: durch Widerspruch.

Ann.: a, b, c erfüllen die obige Bedingung doch, es soll also gelten $a = b + c$ und $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Umformen der zweiten Gleichung gibt:

$$\frac{1}{a} = \frac{b+c}{b \cdot c} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{bc}{b+c}$$

einsetzen von a in $a = b + c$ gibt

$$\frac{bc}{b+c} = b + c$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+c)^2 = bc$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + cb + c^2 = 0$$

p.-q.-Formel $\Rightarrow$

$$b_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - c^2}$$

$$= -\frac{c}{2} \pm \underbrace{\sqrt{-\frac{3}{4} c^2}}_{\notin \mathbb{R}} \quad \text{↯ zur Annahme } b \in \mathbb{R}$$

c) siehe oben: $a = \frac{bc}{b+c}$

a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, aber $2 \neq 4 + 4$

$7 = 3 + 4$, aber $\frac{1}{7} \neq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$