4. Übung Zahldarstellung und Kettenbrüche

Aufgabe 1: Zahlumwandlung von Dezimalzahlen in Brüche

a.) $0{,}1024 = \frac{1.024}{10.000} = \frac{64}{625}$

b.) ~~[illegible]~~ $0{,}0625 = \frac{6}{100} + \frac{2}{1.000} + \frac{5}{10.000} = \frac{125}{2.000} = \frac{1}{16}$

c.) $0{,}00336 = \frac{336}{100.000} = \frac{21}{6250}$

d.) $0{,}3333 = \frac{3333}{10.000}$

Aufgabe 2:

$$0{,}1\overline{27} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1.000} + \frac{2}{10.000} + \frac{7}{100.000} + \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{27}{1.000} + \frac{27}{100.000} + \frac{27}{10^7} + \frac{27}{10^9} + \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{27}{1000}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{27}{1.000} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{27}{1.000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1}{10} + \frac{27}{1.0\cancel{00}} \cdot \frac{\cancel{100}}{99}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{990}_{\,110}} = \underline{\underline{\frac{7}{55}}}$$

Aufgabe 3:

a.) $$0{,}013\overline{6} = \frac{13}{1.000} + \frac{6}{10.000} + \frac{6}{100.000} + \dots$$

$$= \frac{13}{1.000} + \frac{6}{10.000}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right)$$

$$= \frac{13}{1.000} + \frac{6}{10.000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \dots = \frac{41}{3000}$$

b.) $0{,}01\overline{36} = \frac{1}{100} + \frac{36}{9900} = \frac{135}{9900}$

$= \underline{\underline{\frac{3}{220}}}$

c.) $0{,}0\overline{136} = x$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 10.000\,x & = & 136{,}\overline{136} \\
- & 10\,x & = & 0{,}\overline{136} \\
\hline
 & 9.990\,x & = & 136
\end{array}
$$

$x = \frac{136}{9.990} = \underline{\underline{\frac{68}{4995}}}$

d.) $0{,}\overline{0136} = x$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 10.000\,x & = & 136{,}\overline{0136} \\
- & x & = & 0{,}\overline{0136} \\
\hline
 & 9.999\,x & = & 136
\end{array}
$$

$x = \underline{\underline{\frac{136}{9.999}}}$

Aufgabe 4:

Die gegebene Dezimalzahl lässt sich nicht als Bruch schreiben, da sie irrational ist.

Jede rationale Zahl hat eine endliche oder periodische Dezimalbruchentwicklung.

Irrationale Zahlen haben dagegen eine unendliche nicht-periodische Dezimalbruchentwicklung, wie in diesem Fall

$0{,}1010010001\ldots$

Aufgabe 5 : Kettenbrüche

a.)

$$[1;1,16,2,9,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \frac{1}{1}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{10}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \frac{10}{21}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{21}{346}} = 1 + \frac{346}{367} = \underline{\underline{\frac{713}{367}}}$$

$$\frac{713}{367} \approx 1{,}94277929$$

b.)

$$[1;1] = \cancel{1}\, 1 + \frac{1}{1} = 2$$

absoluter Fehler: $\frac{713}{367} - 2 = -\frac{21}{367} = -0{,}057220708\ldots$

$$[1;1,16] = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{16}} = 1 + \frac{16}{17} = \frac{33}{17}$$

absoluter Fehler: $\frac{713}{367} - \frac{33}{17} \approx 0{,}0016028209$

$$[1;1,16,2] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{33}}$$

$$= 1 + \frac{33}{35} = \frac{68}{35}$$

absolutes Fehler: $\frac{713}{367} - \frac{68}{35} = -0{,}0000778513\ldots$

$$[1;1,16,2,9] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{9}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \frac{9}{19}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{19}{313}} = 1 + \frac{313}{332} = \frac{645}{332}$$

absolutes Fehler: $\frac{713}{367} - \frac{645}{332} = 0{,}0000082072 15\ldots$