3. Übung Goldener Schnitt

1. Aufgabe

Beh: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Bew: mit vollständiger Induktion

I. Anfang: $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = q^0 + q^1 = 1 + q \quad ✓$$

$$\frac{1-q^2}{1-q} = \frac{\cancel{(1-q)}(1+q)}{\cancel{(1-q)}} = 1 + q \quad ✓$$

I. Annahme: die Beh. gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

I. Schluß: $n \longmapsto n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$$

$$\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Damit gilt die Beh. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ □

Betrachten wir den Sonderfall $q = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n+1$$

und für die rechte Seite erhalten wir

$$\lim_{q \to 1} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{q \to 1} \frac{-(n+1)\, q^n}{-1}$$ mit der Regel von L'Hopital

$$= n+1$$

Damit stimmt auch der Grenzwert überein. □

2. Aufgabe:

b.) Weise nach, dass T der geforderte Teilpunkt ist, also

$$|AT| = \varphi |AB| \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Es gilt: $|AT| = |EA| - |EB| = b - \frac{a}{2} \stackrel{!}{=} \varphi \cdot a$

nach Pythagoras gilt: $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$

damit gilt

$$\varphi \cdot a \stackrel{!}{=} b - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{4}+1\right)} - \frac{a}{2}$$

$$= a \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}\right) = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

also stimmt die Beh. mit $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\square$

3. Aufgabe:

Beh: $|BT| = \varphi |AB|$

Bew: definiere $b := |AB|$, $c := |AE|$, $a := |BE|$

dann gilt $|BT| = c - a$ mit $c = \sqrt{a^2+b^2}$ und $a = \frac{b}{2}$

also

$$|BT| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} - \frac{b}{2}$$

$$= b\left(\sqrt{\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= b\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = b \cdot \varphi = |AB| \varphi$$

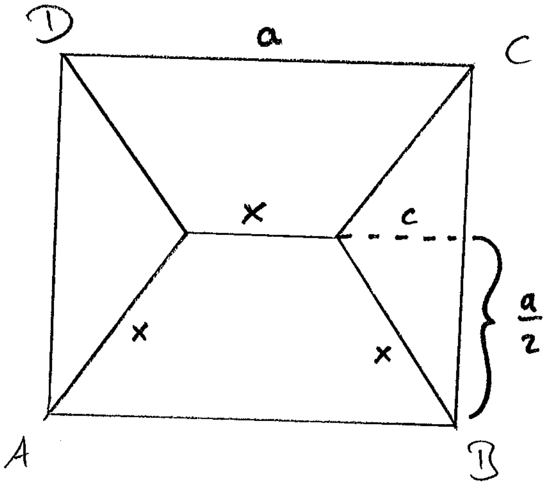
$\Rightarrow$ die Beh. gilt mit $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\square$

4. Aufgabe:

gegeben: Quadrat ABCD mit Kantenlänge a

gesucht: Länge der 5 im Innern liegenden Strecken x.



Für die Hilfslinie c gilt

$$c = \frac{a-x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = a - 2c$$

und für x gilt

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$a - 2c = \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - \frac{4}{3}ac + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

p.-q Formel

$$\Rightarrow \quad c_{1/2} = \frac{2}{3}a \pm \sqrt{\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$c_{1/2} = \frac{2}{3}a \pm \frac{\sqrt{7}}{6}a$$

einsetzen der positiven Lösung in die Gleichung für x gibt

$$x = a - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{\sqrt{7}}{6}a\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a\left(\frac{3 - 4 + \sqrt{7}}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a\left(\frac{\sqrt{7} - 1}{3}\right)$$

$\square$