2. Übung: Folgen und Reihen

1. Aufgabe: vollständige Induktion

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Induktionsanfang:

$n = 2$ $\qquad \sum_{k=1}^{2} k^2 = 1 + 4 = 5$ ✓

$\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} 2(2+1)(4+1) = 5$ ✓

Induktionsannahme:

Die obige Beh. gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluß: $\quad n \mapsto n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6} \left(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right)$$

$$= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)\left(2(n+1) + 1\right)$$

Die Beh. gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) <u>Beh:</u> $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

<u>Beweis</u> durch vollst. Induktion

I. Anfang $n = 1$

$$\sum_{i=0}^{1} 2^i = 2^0 + 2^1 = 3 \checkmark$$

$$2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3 \checkmark$$

I. Ann.: Beh. gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

I. Schluß: $n \longmapsto n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \overset{\text{I. An.}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot (2^{n+1}) - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Also gilt die Beh. für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>2. Aufgabe</u> <u>Reihe</u>

gegeben $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7k} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \dots$

a)

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{7k} = \frac{1}{7}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{7k} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{7k} = \frac{3}{14} + \frac{1}{21} = \frac{11}{42}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{7k} = \frac{11}{42} + \frac{1}{28} = \frac{25}{84}$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{7k} = \frac{25}{84} + \frac{1}{35} \approx 0,32619$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{7k} = \frac{25}{84} + \frac{1}{35} + \frac{1}{42} = 0,35$$

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{7k} = 0,35 + \frac{1}{49} \approx 0,3704$$

2b) <u>Beh.</u>: die unendl. Reihe divergiert

<u>Bew.</u>: mit der harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7k} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Wir wissen, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, also divergiert auch die obige Reihe. $\square$

c.) <u>Bew.</u>: indirekt

<u>Ann</u>: die Reihe konvergiert

$$S = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{35} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{42} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35}$$

zieht man nun beide Summen voneinander ab, so müsste man wieder $\frac{1}{2}$ S erhalten

Gehen wir davon aus, dass die Summen konvergieren, so muss $\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S$ gelten, mit $\frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35} + \ldots = \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \ldots$ was nicht sein kann, ~~es würde dann die Summ~~

Also divergiert die Reihe. $\square$

d.) Sei $S = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \ldots$

schätzt man nun die einzelnen Summanden nach unten ab, erhält man

$$S > \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \underbrace{\frac{1}{28} + \frac{1}{28}}_{= \frac{2}{28} = \frac{1}{14}} + \underbrace{\frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56}}_{= \frac{1}{14}} + \ldots$$

und erhält damit $\quad S > \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \dots$

Die Reihe ist also divergent, da man sie nach unten durch eine divergente Reihe abschätzen kann. $\square$

3. Aufgabe Fibonacci-Folge

Beh: zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen sind teilerfremd.

Bew: durch Widerspruch

(*) $\qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \mid F_n$ und $q \mid F_{n-1}$ und $q \neq 1$

stellen wir (*) nach F_{n-2} um, so erhalten wir

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$$

da q sowohl F_n als auch F_{n-1} teilt, muss es auch die Differenz und damit auch F_{n-2} teilen, also gilt $q \mid F_{n-2}$.

Damit folgt dann

$$q \mid F_{n-3} \quad \text{, denn} \quad F_{n-3} = F_{n-1} - F_{n-2}$$

Dies kann man bis F_1 durchführen und erhält

$$F_1 = F_3 - F_2 \qquad \text{mit } q \mid (F_3 - F_2) \quad \text{, also } q \mid F_1$$

F_1 ist aber nach Definition der Fibonacci-Zahlen 1, damit gilt $q \mid 1$, also $q = 1$ $\quad ↯ \quad$ zur Annahme q ist echter Teiler von F_n und F_{n-1}

Also sind zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen teilerfremd.

$\square$

Aufgabe 4 modifizierte Fibonacci-Zahlen

gegeben: Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$

a.)

$b_3 = 1 + 2 = 3$

$b_4 = 3 + 2\cdot 1 = 5$

$b_5 = 5 + 2\cdot 3 = 11$

$b_6 = 11 + 2\cdot 5 = 21$

$b_7 = 21 + 2\cdot 11 = 43$

$b_8 = 43 + 2\cdot 21 = 85$

$b_9 = 85 + 2\cdot 43 = 171$

$b_{10} = 171 + 2\cdot 85 = 341$

b.) Quotient aus zwei Folgegliedern

$$\frac{b_{10}}{b_9} = \frac{341}{171} = 1{,}994152$$

Vermutung: der Grenzwert lautet 2

c.) Wir nehmen an, es ex. ein Grenzwert $q \in \mathbb{R}^+$ für die Quotienten aufeinander folgender Folgenglieder.

Da wir die Existenz von q für $n \to \infty$ voraussetzen, können wir für genügend große $n\in\mathbb{N}$ schreiben

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{\text{n. Def.}}{=} \frac{b_{n+1} + 2\cdot b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{2b_n}{b_{n+1}} = 1 + 2\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}} \qquad (**)$$

definieren wir nun $x := \frac{b_{n+1}}{b_n}$, erhalten wir aus $(**)$

$$x = 1 + 2\cdot\frac{1}{x} \qquad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \qquad | \text{ p.-q. Formel}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{also ist der Quotient } q = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \notin \mathbb{R}^+$$

$\square$