1. Übung Folgen und Reihen

1. Aufgabe:

a.) Folge $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ mit der rekursiven Form $a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1$
Leite eine Form her, in der a_n ausschließlich durch a_{n-1} definiert wird.

wir wissen $a_{n-1} = (n-1)^2$, also gilt $\sqrt{a_{n-1}} = n-1$
und dies eingesetzt ergibt:

$$a_n = a_{n-1} + 2\sqrt{a_{n-1}} + 1$$

$\square$

b.) Leite zur geschlossenen Form $a_n = \frac{n-1}{n}$ eine rekursive Form her.

$a_1 = \frac{0}{1} = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$

prinzipielle Lösungsweg, um von einer geschlossenen auf eine rekursive Form zu kommen

1. Gleichung für a_n: $a_n = \frac{n-1}{n}$
2. Gleichung für a_{n-1}: $a_{n-1} = \frac{n-2}{n-1}$
3. a_{n-1} nach n auflösen:

$$a_{n-1} = \frac{n-2}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\,a_{n-1} = n-2$$

$$\Leftrightarrow n a_{n-1} - a_{n-1} - n = -2$$

$$\Leftrightarrow (a_{n-1} - 1)n - a_{n-1} = -2$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{a_{n-1} - 2}{a_{n-1} - 1}$$

4. einsetzen von n in a_n:

$$a_n = \frac{\frac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}-1} - 1}{\frac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}-1}} = \frac{\frac{a_{n-1} - 2 - a_{n-1} + 1}{\cancel{a_{n-1}-1}}}{\frac{a_{n-1}-2}{\cancel{a_{n-1}-1}}}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{2a_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 2}$$

$\square$

2. Aufgabe Arithmetische Reihe

Berechnung von $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 99$

a.) wie Gauß

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 99 \quad (\text{jeweils } + 4) \\
+ \quad x & = & 99 + 95 + 91 + \dots + 3 \\
\hline
2x & = & 102 + 102 + \dots + 102 = 25 \cdot 102
\end{array}
$$

also $2x = 25 \cdot 102 \Rightarrow x = 25 \cdot 51 = \underline{\underline{1275}}$

b.)

$$x = 3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 99$$

$$x = 4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 100 - 25 \cdot 1 \quad (\text{da überall } +1 \text{ addiert wurde})$$

$$x = 4(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25) - 25$$

$$x = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{25 \cdot 26}{\cancel{2}_{1}} - 25$$

$$x = 2 \cdot 25 \cdot 26 - 25 = \underline{\underline{1275}}$$

Aufgabe 3 Mathematik und Musik

Wir haben in der chromatischen Stimmung 12 Stufen in der Oktave. Betrachten wir diese 12 Stufen als geometrische Folge.

a.) Wie groß ist q?

Wir haben 12 Stufen, um die Frequenz des Grundtons zu verdoppeln, also muss gelten

$$2 = q^{12}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{q = \sqrt[12]{2}}}$$

b.) Betrachten wir nun die Quinte ($c \to g$), so haben wir 7 Schritte, also müssen wir q^7 bestimmen.

$$q^7 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 1{,}498307$$

Gehen wir weiter von einem Grundton c von 600 Hz aus, so erhalten wir für g

$$600\ Hz \cdot 1{,}5 = 900\ Hz$$ für die reine Stimmung

und $$600\ Hz \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 898{,}9842\ Hz$$ für die chrom. Stimmung.

Der Unterschied beträgt also $900 - 898{,}9842 = \underline{\underline{1{,}0158\ Hz}}$

<u>Aufgabe 4</u> <u>Zahlenfolgen & Primzahlen</u>

a.) Berechne die ersten Folgeglieder zu $a_n = n^2 + n + 41$ und prüfen sie, ob es Primzahlen sind.

$a_1 = 43$ $\quad a_4 = 61$ $\quad a_7 = 97$ $\quad a_{10} = 151$

$a_2 = 47$ $\quad a_5 = 71$ $\quad a_8 = 113$

$a_3 = 53$ $\quad a_6 = 83$ $\quad a_9 = 131$

Es sind alles Primzahlen.

b.)
$$\begin{aligned} a_{40} &= 40^2 + 40 + 41 \\ &= 40 \cdot 40 + 40 + 40 + 1 \\ &= 1681 = 41^2 \end{aligned}$$ keine PZ

$$\begin{aligned} a_{41} &= 41^2 + 41 + 41 \\ &= 41(41 + 2) \\ &= 41 \cdot 43 = 1763 \end{aligned}$$ keine PZ

c.) <u>Beh.</u>: $a_n = bn^2 + cn + d$, $b, c, d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, hat nicht nur PZ als Folgeglieder

<u>Bew.</u>: setze $n = d$, dann gilt

$$\begin{aligned} a_d &= b d^2 + c d + d \\ &= d(\underbrace{bd + c + 1}_{>1}) \end{aligned}$$

damit ist d echter Teiler von a_d und a_d somit keine PZ.

$\square$