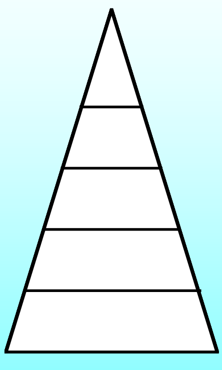
# Zahlenfolgen

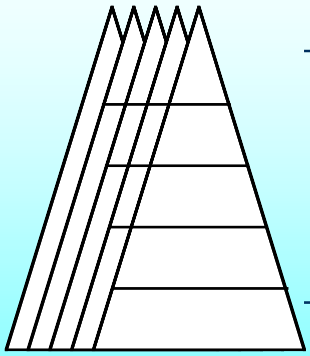

1

# Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?



2

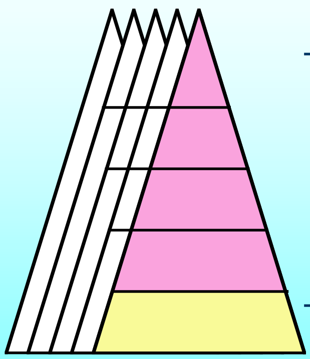
## Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?



| # Linien | # Dreiecke | # Trapeze |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 4 | 6 |
| 4 | 5 | 10 |
| 5 | 6 | 15 |

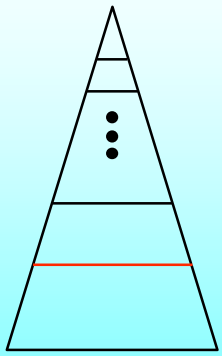


## Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?



| # Linien | # Dreiecke | # Trapeze |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 4 | 6 |
| 4 | 5 | 10 |
| 5 | 6 | 15 |

## Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?



| | Dreiecke | Trapeze |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| n | n+1 | $a_n$ |
| n+1 | n+2 | $a_{n+1} = a_n + n+1$ |



## Geschlossene und rekursive Formeln

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ... |

Die Folge ist definiert durch die rekursive Formel

$$a_n = a_{n-1} + n, \qquad a_0 = 0.$$

Die Formel heißt rekursiv, weil die Definition des Folgegliedes $a_n$ vom vorhergehenden Folgenglied $a_{n-1}$ abhängt.

## Geschlossene und rekursive Formeln

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | ... |

Die Folge der Quadratzahlen ist gegeben durch die geschlossene Formel

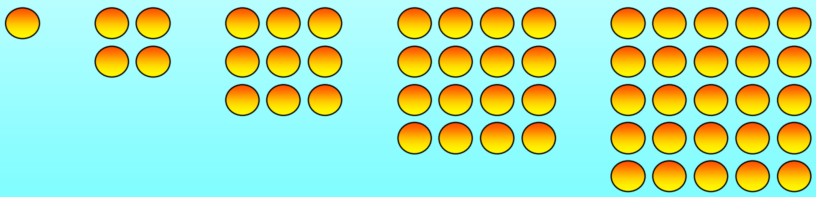
$$a_n = n^2.$$

Die Formel für $a_n$ heißt geschlossen, weil sie nur vom Index n abhängt.



## Quadratzahlen

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_n$ | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | **36** | ... |



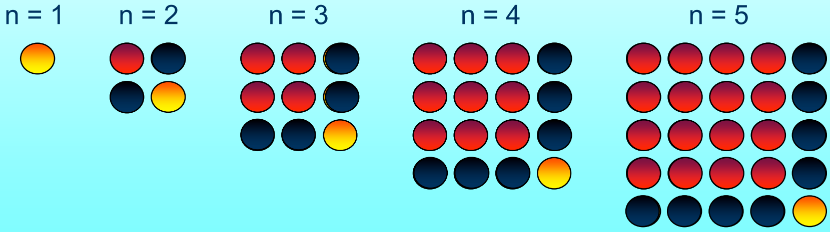
# Quadratzahlen

Geschlossene Formel

$$q_n = n^2$$

Rekursive Formel

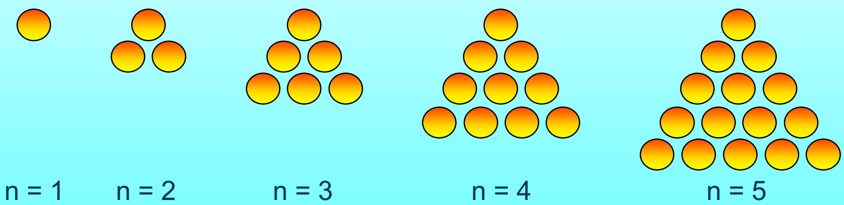
$$q_n = q_{n-1} + 2(n-1) + 1$$
$$q_1 = 1$$






# Dreieckszahlen

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | **1** | **3** | **6** | **10** | **15** | **21** | ... |



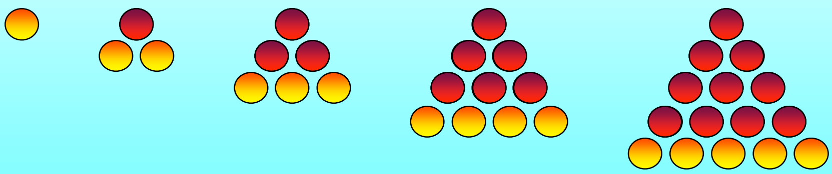
## Dreieckszahlen

Rekursive Formel

$$d_n = d_{n-1} + n$$

$$d_1 = 1$$

Geschlossene Formel



n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5



## Dreieckszahlen

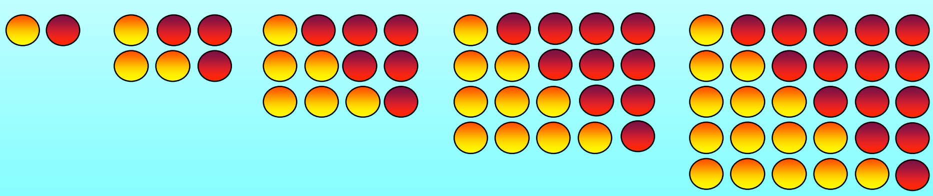
Rekursive Formel

$$d_n = d_{n-1} + n$$

$$d_1 = 1$$

Geschlossene Formel

$$d_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

## Summe der natürlichen Zahlen

Gesucht ist die 100.
Dreieckszahl!

1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100

**= 5050**

Carl Friedrich Gauss
1777-1855



## Summe der natürlichen Zahlen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | + | | 100 | = **101** |
| 2 | + | | 99 | = **101** |
| 3 | + | 98 | | = **101** |
| | ⋮ | | | ⋮ |
| | 50 + 51 | | | = **101** |

$$1+2+3+...+100=\frac{100\cdot 101}{2}=$$

**50 * 101 = 5050**

# Dreiecks- und Quadratzahlen

$d_n + d_{n-1} = n^2$

$d_n + d_{n-1} = q_n$

Wenn man zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen addiert, erhält man eine Quadratzahl.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ... |

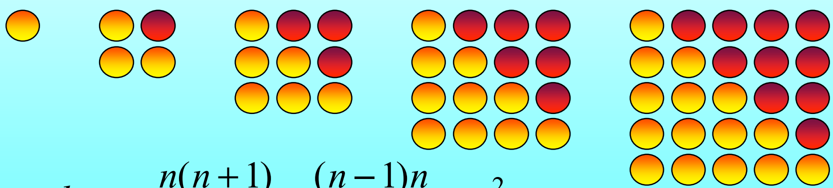


# Dreiecks- und Quadratzahlen

$d_n + d_{n-1} = n^2$

$d_n + d_{n-1} = q_n$

Wenn man zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen addiert, erhält man eine Quadratzahl.



$$d_n + d_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2$$

## Die Folge der Nicht-Quadratzahlen

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16...

Gibt es für die Folge aller natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahl sind, eine Formel?

Ist sie geschlossen oder rekursiv?

Arbeitsblatt

$$u_n = n + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor$$



## Primzahlen zwischen 1 und 100

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 11 | | 31 | 41 | | 61 | 71 | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| | 13 | 23 | | 43 | 53 | | 73 | 83 | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 7 | 17 | | 37 | 47 | | 67 | | | 97 |
| | 19 | 29 | | | 59 | | 79 | 89 | |

## Die Folge der Primzahlen

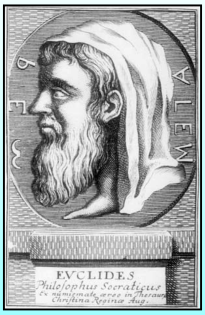
Es gibt unendlich viele Primzahlen, doch eine Formel ist nicht bekannt.

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, nämlich *n* Stück

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Betrachte:

$$\mathbf{P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}$$




Euklid von Alexandria
ca. 325-265 v. Chr.



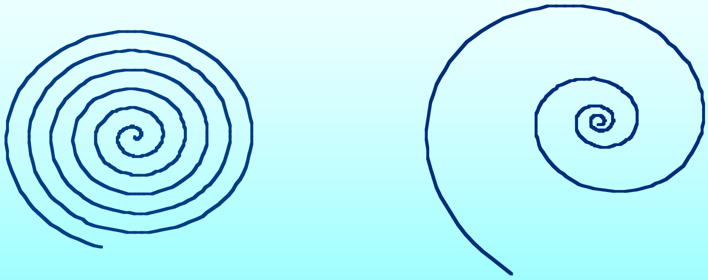
$$\mathbf{P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}$$

Annahme:

a) P ist eine Primzahl
Dann haben wir einen Widerspruch zur Annahme, dass es nur *n* Primzahlen gibt.

b) P ist keine Primzahl
Dann muss P durch eine der Zahlen $\mathbf{p_k}$ teilbar sein.
Dann ist aber auch die Differenz $\mathbf{P - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1}$ durch $\mathbf{p_k}$ teilbar.
Damit wäre aber 1 durch $\mathbf{p_k}$ teilbar. Widerspruch!
Also, wenn **P** keine Primzahl ist, muss es eine <u>neue</u> Primzahl geben.
Dann haben wir wieder einen Widerspruch zur Annahme, dass es nur *n* Primzahlen gibt.

## Arithmetische und geometrische Prozesse



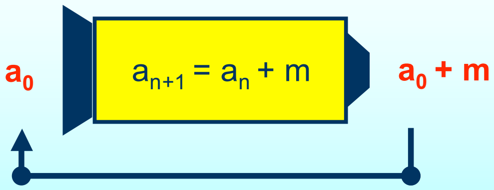


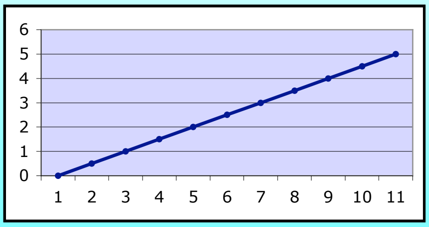
## Arithmetische Prozesse

3 $\quad \boxed{a_{n+1} = a_n + 2} \quad$ 5

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | **1** | **3** | **5** | **7** | **9** | **11** | **...** |

## Arithmetische Prozesse




Die Folgenglieder einer arithmetischen Folge liegen auf einer Geraden.

$a_{n+1} - a_n = m$



## Die arithmetische Reihe

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_0$ | $a_0+d$ | $a_0+2d$ | $a_0+3d$ | $a_0+4d$ | $a_0+5d$ | ... |

$$s_n = a_0 + (a_0+d) + (a_0+2d) + \ldots + (a_0+nd)$$

$$s_n = (a_0+nd) + (a_0+(n-1)d) + (a_0+(n-2)d) + \ldots + a_0$$

$$2s_n = (a_0+(a_0+nd)) + (a_0+(a_0+nd)) + (a_0+(a_0+nd)) + \ldots + (a_0+(a_0+nd))$$

$$2s_n = (n+1)(a_0+a_n)$$

$$s_n = \frac{(n+1)(a_0+a_n)}{2}$$

# Geometische Prozesse

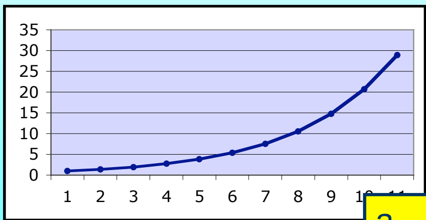
$$a_{n+1} = a_n * 2$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | **1** | **2** | **4** | **8** | **16** | **32** | **...** |



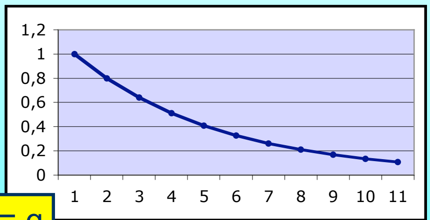
# Geometische Prozesse

$a_0$ → $a_{n+1} = a_n * q$ → $a_0 * q$



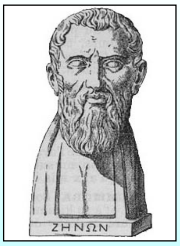

q > 1

$a_{n+1} / a_n = q$

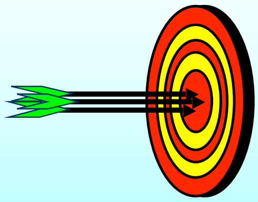


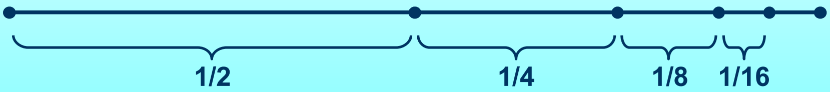

q < 1

# Zenon‘s Paradoxon




Zenon von Elea
495 bis 430 v. Chr.



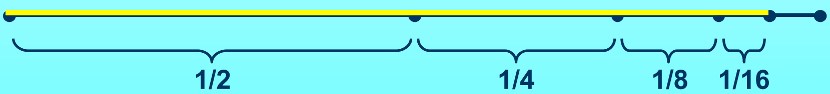





# Zenon‘s Paradoxon

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} &&= \frac{1}{2}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4} &&= \frac{3}{4}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &&= \frac{7}{8}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} &&= \frac{15}{16}
\end{aligned}\right\}$$

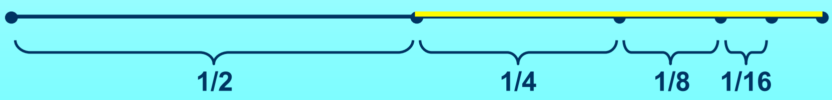
Länge der bereits zurückgelegten Strecke.



# Zenon's Paradoxon

Länge der noch verbleibenden Strecke.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \end{array} \right.$$






# Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots$$

allgemein:

$$1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+$$

Lassen sich unendlich viele Potenzen von *q* aufsummieren?

## Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$q \cdot s_n = \quad q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$s_n - q \cdot s_n = 1 \qquad - q^{n+1}$$

$$s_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

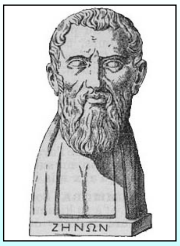


## Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

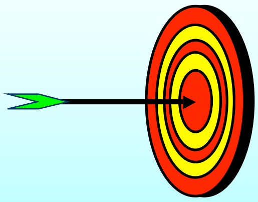
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad q^{n+1} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{wenn } q<1 \text{ ist,} \\ \infty & \text{wenn } q>1 \text{ ist.} \end{cases}$$

$$s_n \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{wenn } q<1 \text{ ist,} \\ \infty & \text{wenn } q>1 \text{ ist.} \end{cases}$$

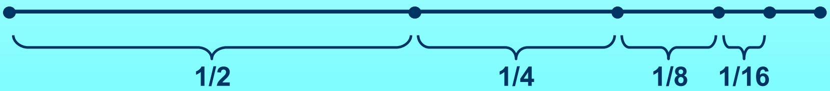


# Zenon‘s Paradoxon

Zenon von Elea
495 bis 430 v. Chr.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$






# Die unendliche geometrische Reihe

$$s = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

Also: Werden bei der geometrischen Reihe die einzelnen Summanden kleiner, so ergibt die unendliche Reihe einen endlichen Wert.

Verallgemeinerung

Werden die einzelnen


(irgendwie) kleiner, so ergibt eine unendliche endlichen Wert.