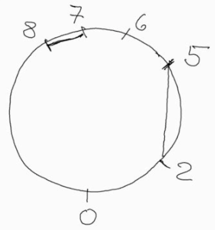
Protokoll der Vorlesung vom 17.12.07

Faktor ·3 Divisor :13 $\underline{5} \cdot 3 = 15$ $15 : 13 = 1$ Rest $\underline{2}$ $\underline{7} \cdot 3 = 21$ $21 : 13 = 1$ Rest $\underline{8}$  Die Diagramme sind für jeden ~~Divisor~~ Modul m und jeden Faktor f symmetrisch. Achse ist die Gerade durch den Mittelpunkt und 0	Eine Rechenübung aus der Grundschule. Die Rechnung wird in ein Diagramm übersetzt. Dazu wird die Startzahl mit dem Endresultat, der Rest beim Teilen, durch eine Linie verbunden. Rechenkontrolle wie beim LÜK-Kasten.

Zwei Zahlen k und k' liegen symmetrisch, wenn gilt: $k + k' = m$ oder: $k' = m - k$ (1) Im Diagramm werden die Zahlen k und r mit einer Linie vebunden, wenn gilt: $k \cdot f = m \cdot t_1 + r$ (2) 2. Linie von k' nach r' $k' \cdot f = m \cdot t_2 + r'$ (3) Beide Linien sind symmetrisch, wenn gilt:	Mathematisierung der Bedingung „ist symmetrisch“ für zwei Zahlen am Kreis. Mathematisierung einer Linie im Diagramm. Mathematisierung „Linien sind symmetrisch“

<table>
<tr>
<td>Wenn k symmetrisch zu k'
dann auch r symmetrisch
zu r'.
$k' = m - k$ (1) $\quad | \cdot f$
$k'f = mf - kf$
(2) und (3) einsetzen
$mt_2 + r' = mf - (mt_1 + r)$
$= mf - mt_1 - r$
$r + r' = mf - mt_1 - mt_2$
$= m(f - t_1 - t_2)$
Da $r, r' < m$, ist $r + r' < 2m$
$r, r' > 0$, $r + r' > 0m$
Also muss gelten $r + r' = m$</td>
<td>Wenn die beiden Anfangszahlen k und k' symmetrisch sind und k mit r und k' mit r' verbunden werden, dann ist auch r symmetrisch zu r'.

Genau dieses bedeutet, dass r und r' am Kreis symmetrisch liegen, q.e.d.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Zahlenbeispiel
$m = 1\cancel{2}3 \qquad f = 2$
Linien $\underset{k}{3} \rightarrow \underset{r}{6}$ und $\underset{k'}{10} \rightarrow \underset{r'}{7}$
(2) $kf = m \cdot t_1 + r$
$\underset{6}{3 \cdot 2} = 13 \cdot 0 + 6$
(3) $k'f = mt_2 + r'$
$\underset{20}{10 \cdot 2} = 13 \cdot 1 + 7$
(1) $k + k' = m$
$3 + 10 = 13$ ✓
Beweis: $r + r' = m(f - t_1 - t_2)$
$6 + 7 = 13(2 - 0 - 1)$
$= 13 \cdot 1$ ✓</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Gleiche Diagramme $m = 13 \quad 3 \leftrightarrow 9 \quad 5 \leftrightarrow 8 \quad 2 \leftrightarrow 7$ $ 4 \leftrightarrow 10 \quad 6 \leftrightarrow 11$ $m = 7 \quad 2 \leftrightarrow 4 \quad 3 \leftrightarrow 5$ $m = 8 \quad$ —— Beispiel $m = 7$ $\underset{k}{2} \cdot \underset{f_1}{2} = 4 = 7 \cdot 0 + \underset{r}{4}$ $4 \cdot \underset{f_2}{4} = 16 = 7 \cdot 2 + 2$ $2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot 4} 2$ $3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$ Gegeben sind zwei Faktoren f_1 und f_2 und der Modul m Dann sind die Diagramme zu f_1 und f_2 gleich, wenn gilt $k f_1 = m \cdot t_1 + r \quad r \cdot f_2 = m t_2 + k$	Es gibt Moduln, zu denen es nicht zwei gleiche Diagramme gibt. Die Multiplikation mit 4 ist hier (m = 7) invers zur Multiplikation mit 2. Die Linien sind gleich, denn k und r werden mit einer Linie verbunden. Nur sind jeweils die Verbindungsrichtungen verschieden.

$k f_1 = m t_1 + r \quad r f_2 = m t_2 + k$ Beide Gleichungen multiplizieren $kr \cdot f_1 f_2 = m^2 t_1 t_2 + m t_1 k + m t_2 r + rk$ $kr(f_1 f_2 - 1) = m(m t_1 t_2 + t_1 k + t_2 r)$ das soll gelten für beliebiges k also muss $f_1 f_2 - 1$ ein Vielfaches von m sein. oder $f_1 f_2 \equiv 1 \mod m$ Beispiel $m = 13$ $f_1 = 3 \quad f_2 = 9 \quad f_1 f_2 = 27 = 13 \cdot 2 + 1$	Allgemein: Ist *na* durch *t* teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$, dann muss *a* durch *t* teilbar sein.