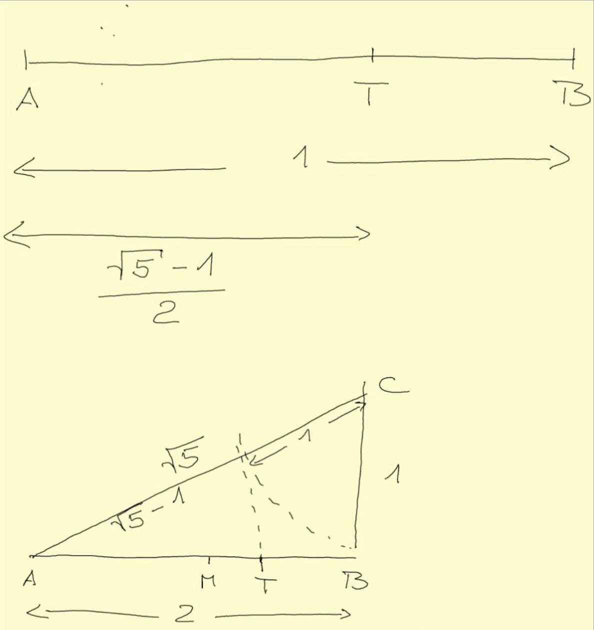
Mitschrift 3.12.07



$|AT| = \sqrt{5} - 1 \qquad |AB| = 2$

$|AT| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad |AB| = 1$

Wiederholung Konstruktion des Goldenen Schnitts

Das reguläre Fünfeck und der goldene Schnitt

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \cancel{CD}\,\frac{|FC|}{|CD|}$$

Kante des Fünfecks : a

Diagonale " : d

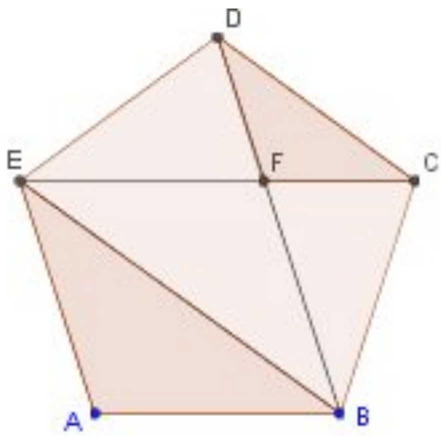
$|AB| = a = |CD|$

$|BE| = d \qquad |FC| = d - a$

$\rightarrow \frac{a}{d} = \frac{d-a}{a}$ ist Gleichung für den goldenen Schnitt

$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot d$ nach d auflösen

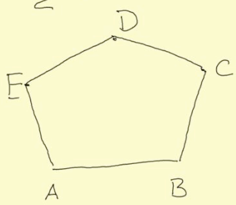
$$d = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\, a = \frac{2\,(\sqrt{5}+1)}{\underbrace{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}_{4}}\, a$$



Die Punktbezeichnungen im Ansatz links beziehen sich auf diese Zeichnung.

$$d = \frac{2}{4}(\sqrt{5}+1)\,a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,a$$

$$= \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$$



Fibonacci-Zahlen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots \rightarrow \varphi$$

Gleichung: $\frac{\varphi}{1} = \frac{1-\varphi}{\varphi}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi} - 1$$

Diese Berechnung von *d* aus *a* wird geometrisch nachvollzogen, um die Diagonalenlänge zu konstruieren.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad | : F_n$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n+1}}} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$\frac{F_n}{F_{n+1}} \rightarrow \varphi$, $\frac{F_{n-1}}{F_n} \rightarrow \varphi$

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi \quad | -1$$

$$\frac{1}{\varphi} - 1 = \varphi$$

Die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen

Formel von Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Die beiden Zahlen $\Phi_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $\Phi_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = 1 + x$. Das wird ganz wesentlich beim Berechnen der Potenzen von Φ_1 bzw. Φ_2 benutzt.

Ein Beispiel für das Berechnen von F_3 mit der Formel von Binet.

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi_1^3 - \phi_2^3\right]$$

α β γ

$$\begin{aligned}
\phi_1^3 &= \phi_1 \cdot \phi_1^2 \\
&= \phi_1 \cdot (1 + \phi_1) \\
&= \phi_1 + \phi_1^2 \\
&= \phi_1 + 1 + \phi_1 \\
&= 1 + 2\phi_1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\phi_2^3 &= \\
&\vdots \\
&1 + 2\phi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[1 + 2\phi_1 - (1 + 2\phi_2)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2(\phi_1 - \phi_2)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2 \cdot \sqrt{5}\right]
\end{aligned}$$

$$F_3 = 2$$

Ein weiteres Beispiel für F_4.

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi_1^4 - \phi_2^4\right]$$

$$\begin{aligned}
\phi_1^4 = \phi_1^2 \cdot \phi_1^2 &= (1 + \phi_1)(1 + \phi_1) \\
&= (1 + \phi_1 + \phi_1 + \phi_1^2) \\
&= (1 + \phi_1 + \phi_1 + 1 + \phi_1) \\
&= 2 + 3\phi_1
\end{aligned}$$

$$\phi_2^4 = 2 + 3\phi_2$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2 + 3\phi_1 - (2 + 3\phi_2)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[3(\phi_1 - \phi_2)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 - \phi_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[3 \cdot \sqrt{5}\right] = 3$$