Mitschrift vom 26.11.07: Der Goldene Schnitt

Der goldene Schnitt

A Major | Minor B

$$\frac{\text{Major}}{\text{Gesamtstr.}} = \frac{\text{Minor}}{\text{Major}}$$

Gesamtstrecke $= 1$

Major $= x$

Minor $= 1-x$

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{oder} \quad \underbrace{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}_{\text{nicht sinnvoll}}$$

Definition des Goldenen Schnitts:

Die beiden Verhältnisse sind gleich

Dieser Ansatz führt auf eine eindeutig definierte Zahl.

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \underset{\text{Def}}{=} \varphi \approx 0{,}618$$

Kettenbruch zu φ

$$\varphi = 0 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}}$$

$$= 0 + \frac{1}{\frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+1)}{\cancel{4}\,2}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}}$$

$$\varphi = [0; \overline{1}]$$

Die Kettenbruchzerlegung führt bereits nach einem Schritt auf eine periodische Wiederholung.

Zweite Herleitung der Kettenbruchentwicklung für φ

„charakteristische" Gleichung

$$x^2 = 1 - x \quad | : x$$

$$x = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \quad | +1$$

$$1 + x = \frac{1}{x} \quad | \text{ Kehrwert}$$

$$\frac{1}{1+x} = x$$

$$x = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}$$

Näherungen für φ durch <u>endliche</u> Kettenbrüche

$$f_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad f_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$f_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$f_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} \leftarrow f_3 \qquad = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

Zahlenfolge: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

Fibonacci-Zahlen

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$$\cancel{a_{k+1} = a_k + a_{k-1}}$$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_1 = 1 \qquad F_2 = 1$$

$$f_1 = \frac{F_1}{F_2} \qquad f_2 = \frac{F_2}{F_3} \qquad \text{allg. } f_k = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

Die Näherungsbrüche f_k konvergieren für $k \to \infty$ gegen den Goldenen Schnitt.

Folgerung: Der Quotient $\frac{F_k}{F_{k+1}}$ von zwei aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen konvergiert für $k \to \infty$ gegen den Goldenen Schnitt.

Der goldene Schnitt
im regulären Fünfeck

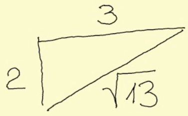
Konstruktion zum goldenen Schn.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$$

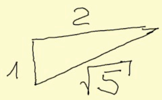
Die Wurzelspirale stellt sicher, dass jede Quadratwurzel konstruierbar ist.

„Abkürzungen"

$$\sqrt{13} = \sqrt{9+4}$$



$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1}$$



$$= 9 + 9 + 4 + 1$$

$$23 = 16 + 4 + 1 + 1 + 1$$

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens 4 Quadratzahlen schreiben