Peitgen / Albers Ausgewählte Anwendungen d. Mathem.

11. Übung, Lösungsskizzen WiSe 07/08

PRÄSENZÜBUNGEN

1. Ausgehend vom „Deckel"-Fünfeck

5 Dreiecke + 5 Dreiecke + 5 Fünfecke

ergibt 10 Dreiecke und 6 Fünfecke im oberen Teil

mittlere „Bauchbinde" : 10 Quadrate

Boden: 5 Quadrate, 5 Dreiecke, 1 Fünfeck

Insgesamt: 15 Dreiecke, 15 Quadrate, 7 Fünfecke

$\underline{\underline{F = 37}}$

Ecken: In jeder Körperecke stoßen 4 Flächenecken zusammen.

$15 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 140 \qquad 140 : 4 = 35$

$\underline{\underline{E = 35}}$

Kanten: Je zwei Flächenkanten bilden eine Körperk.

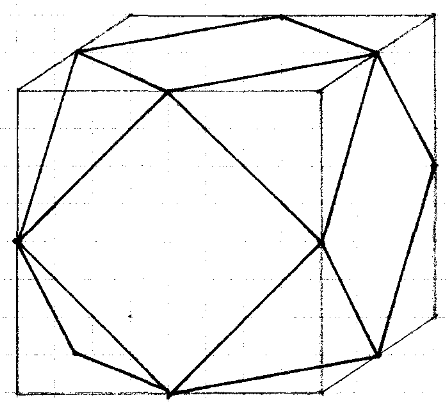
$140 : 2 = 70 \qquad \underline{\underline{K = 70}}$

Eulerscher Polyedersatz

$E + F = 72 \qquad K + 2 = 72$

2. Dem Diagramm entnimmt man: 8 Dreiecke, 6 Quadrate

→ Würfel mit abgeschnittenen Ecken



HAUSÜBUNGEN

1. In einer Körperecke stoßen 2 n-Ecke und 1 m-Eck zusammen. Winkelbedingung

a)
$$2 \cdot 180° \frac{n-2}{n} + 180° \frac{m-2}{m} < 360° \quad \big| : 180°$$

$$2\left(1-\frac{2}{n}\right) + \left(1-\frac{2}{m}\right) < 2 \quad \big| -3$$

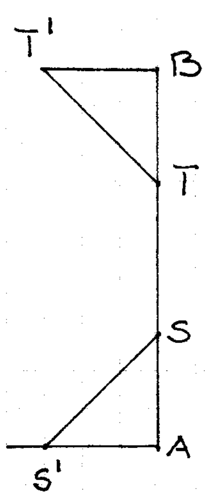
$$-\frac{4}{n} - \frac{2}{m} < -1 \quad \big| : (-2)$$

$$\frac{2}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

b) Lösungen:

$n = 3$	m beliebig	→ „Antiprismen"
$n = 4$	m beliebig	→ Prismen
$n = 5$	$m = 3, 4, \ldots, 9$	Nur $m = 5$ ergibt Körper (Dodekaeder)
$n = 6$	$m = 3, 4, 5$	
$n = 7$	$m = 3, 4$	Ergibt keine Arch. Körper
$n = 8$	$m = 3$	Abgeschnittener Würfel
$n = 9$	$m = 3$	Ergibt keinen Arch. Körper
$n = 10$	$m = 3$	Abgeschnittener Dodekaeder
$n = 11$	$m = 3$	Ergibt keinen Arch. Körper

2.



$|AB| = a$

$|BT| = |AS| = ka \quad \Rightarrow |ST| = a(1-2k)$

Dann ist $|SS'| = |TT'| = k \cdot a\sqrt{2}$

reguläres Achteck fördert:

$|ST| = |SS'|$ also $a(1-2k) = ka\sqrt{2} \quad | : a$

$$1 - 2k = k\sqrt{2} \quad | +2k$$

$$1 = k(2+\sqrt{2}) \quad | : (2+\sqrt{2})$$

$$k = \frac{1}{2}(2-\sqrt{2}) \approx 0{,}293$$

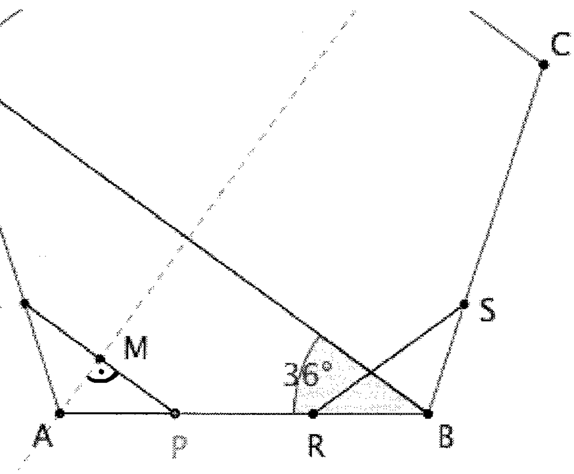
Bei $a = 5\,cm$: $|AS| \approx 1{,}45\,cm$ $\quad |ST| \approx 2{,}10\,cm$

3. $|AB| = a$

$|AP| = |RB| = ka$

$|PR| = a(1-2k)$

offensichtlich gilt



$|\measuredangle EBA| = 36^\circ$

und $QP \parallel EB$

$|PM| = \frac{1}{2} PQ$

$|PM| = |AP| \cdot \cos 36^\circ$

$= ka \cdot \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ $\qquad |QP| = 2 \cdot |PM| = \frac{1}{2} ka (1+\sqrt{5})$

Reguläres 10-Eck: $|QP| = |PR|$

also $\frac{1}{2} ka (1+\sqrt{5}) = a(1-2k) \quad |:a$

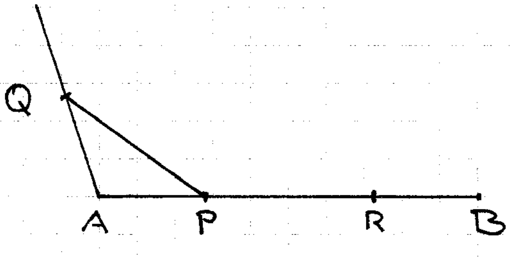
$\frac{1}{2} k (1+\sqrt{5}) = 1-2k \quad |+2k$

$k\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 1$

$k = \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}) \approx 0{,}276$

Bei $a = 5$ cm heißt das

$|AP| = |RB| \approx 1{,}38$ cm $\qquad |PR| \approx 2{,}24$ cm



4. Auf $\overline{AB}$ gilt: $|AO_1| = a \quad |O_1O| = b \quad |OC| = a-b \quad |CO_2| = b$

Höhensatz: $|CD|^2 = 2a \cdot 2b \quad \Rightarrow \quad \underline{|CD| = 2\sqrt{ab}}$

Pythagoras in ΔACD: $(2a)^2 + (2\sqrt{ab})^2 = |AD|^2$

$\underline{\underline{|AD| = 2\sqrt{a^2+ab}}}$

analog $\quad \underline{\underline{|BD| = 2\sqrt{b^2+ab}}}$

1. Strahlensatz, Zentrum A: $\cancel{\frac{|AD|}{|AB|}}$ $\cancel{a}$

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AC|}{AB} \qquad \frac{|AE|}{2\sqrt{a^2+ab}} = \frac{2a}{2(a+b)}$$

$$\underline{\underline{|AE| = 2\frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+ab}}}$$

$$|ED| = |AD| - |AE| = 2\sqrt{a^2+ab} - 2\frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+ab}$$

$$= 2\sqrt{a^2+ab}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)$$

$$\underline{\underline{|ED| = 2\frac{b}{a+b}\sqrt{a^2+ab}}}$$

1. Strahlensatz, Zentrum B

$$\frac{|BF|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BA|} \qquad \frac{|BF|}{2\sqrt{b^2+ab}} = \frac{2b}{2(a+b)}$$

$$\underline{\underline{|BF| = 2\frac{b}{a+b}\sqrt{b^2+ab}}}$$

$$|FD| = |BD| - |BF| = 2\sqrt{b^2+ab} - 2\frac{b}{a+b}\sqrt{b^2+ab}$$

$$= 2\sqrt{b^2+ab}\left(1 - \frac{b}{a+b}\right)$$

$$\underline{\underline{|FD| = 2\frac{a}{a+b}\sqrt{b^2+ab}}}$$

Wenn man $\frac{1}{a+b}$ in die Wurzel zieht, erhält man

$$|AE| = 2a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \qquad |ED| = 2b\sqrt{\frac{a}{a+b}} \qquad |AD| = 2\sqrt{a(a+b)}$$

$$|BF| = 2b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \qquad |FD| = 2a\sqrt{\frac{b}{a+b}} \qquad |BD| = 2\sqrt{b(a+b)}$$