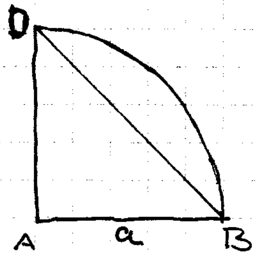
Peitgen/Albers, Ausgewählte Anwendungen d. Mathem.

10. Übung, Lösungsskizzen WiSe 07/08

Präsenzübungen

1. Die halbe „Linse" ist ein Viertelkreis ohne das Dreieck

Skizze



$$\frac{1}{2}L = A_{D} - A_{\Delta}$$

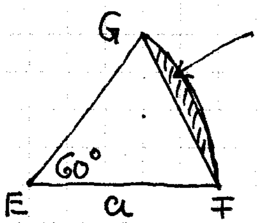
$$= \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2$$

Also $\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2 = \underline{\underline{a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}}$

$$L \approx 0{,}57\, a^2$$

2. Analog zu 1 ist die halbe „Linse" ein Sechstelkreis ohne das Dreieck.

Skizze



$$\frac{1}{2}L = A_{\bigtriangleup} - A_{\Delta}$$

$$= \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Das Kirchenfenster ist dann ein Sechstelkreis plus eine halbe „Linse".

$$A_{KF} = A_{\bigtriangleup} + \frac{1}{2}L = \frac{1}{6}\pi a^2 + \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{A_{KF} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

$$A_{KF} \approx a^2 \cdot 0{,}614$$

Hausübungen

1. Ist M die Mitte von $\overline{CD}$, dann ist E die Mitte von $\overline{O_1D}$. Begründung: 1. Strahlensatz mit Zentrum D.

Also gilt: $|O_1D| = 2a$, da ja $|O_1E| = a$

$|CD| = 2\sqrt{ab}$ (siehe Vorlesung und letzte Übung)

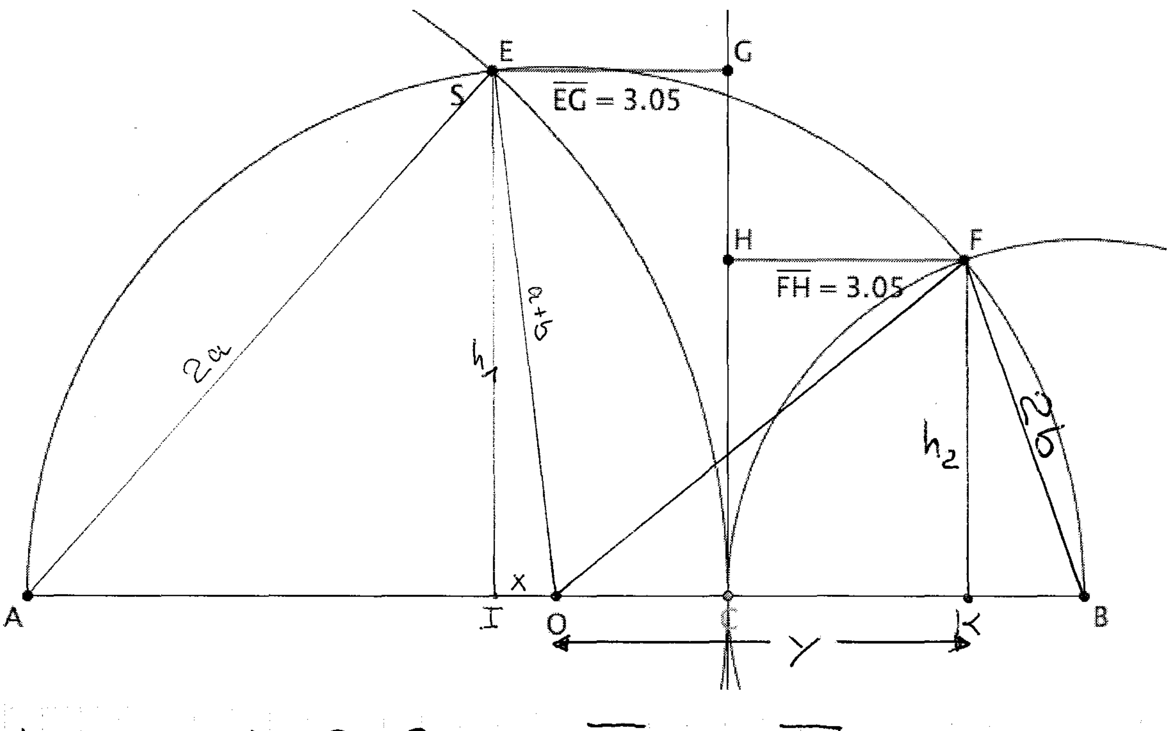
$|O_1C| = a$

Pythagoras im $\Delta\, O_1CD$: $a^2 + (2\sqrt{ab})^2 = (2a)^2$

$$a^2 + 4ab = 4a^2$$

$$4ab = 3a^2 \Rightarrow \underline{\underline{b = \tfrac{3}{4}a}}$$

2.



(Zeichnung mit GeoGebra, $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$ wurden zur Probe gemessen) (Die Bögen S_1 und S_2 wurden ausgeblendet, da sie nicht verwendet werden.)

Lösungsidee: $|EG| = |IC| = |IO| + |OC|$

$$= x + (2a - (a+b))$$

$$= x + a - b$$

x und h_1 kommen beide in den Dreicken AIE u. IOE vor

Pyth. in ΔAIE: $(a+b-x)^2 + h_1^2 = (2a)^2$ ①

Pyth. in ΔIOE: $x^2 + h_1^2 = (a+b)^2$ ②

ausmultiplizieren

①: $a^2 + b^2 + x^2 + 2ab - 2ax - 2bx + h_1^2 = 4a^2$

②: $x^2 + h_1^2 = a^2 + 2ab + b^2$

①-②: $a^2 + b^2 + 2ab - 2ax - 2bx = 3a^2 - 2ab - b^2$

ordnen nach x

$$-2ax - 2bx = 2a^2 - 2b^2 - 4ab \quad |:(-2)$$

$$x(a+b) = b^2 + 2ab - a^2$$

$$x = \frac{b^2 + 2ab - a^2}{a+b}$$

Dann ist

$$|EG| = x + a - b = \frac{b^2 + 2ab - a^2}{a+b} + a - b$$

$$= \frac{b^2 + 2ab - a^2 + a^2 - b^2}{a+b}$$

$$|EG| = 2\frac{ab}{a+b}$$

Analog berechnet man nun $|HF|$ mit h_2 und y in den Dreiecken OKF und KBF:

Pyth. in ΔOKF: $y^2 + h_2^2 = (a+b)^2$ ③

Pyth. in ΔKBF: $(a+b-y) + h_2^2 = (2b)^2$ ④

ausmultiplizieren

④: $a^2 + b^2 + y^2 + 2ab - 2ay - 2by + h_2^2 = 4b^2$

③: $y^2 + h_2^2 = a^2 + 2ab + b^2$

④-③: $a^2 + b^2 + 2ab - 2ay - 2by = 3b^2 - a^2 - 2ab$

ordnen nach y:

$$-2ay - 2by = 2b^2 - 2a^2 - 4ab \quad |:(-2)$$

$$y(a+b) = -b^2 + a^2 + 2ab$$

$$y = \frac{a^2 + 2ab - b^2}{a+b}$$

$$|HF| = |CK| = |OK| - |OC|$$

$$= y - (a-b)$$

$$= \frac{a^2 + 2ab - b^2}{a+b} - (a-b)$$

$$= \frac{a^2 + 2ab - b^2 - a^2 + b^2}{a+b}$$

$$\underline{\underline{|HF| = 2\frac{ab}{a+b}}}$$

Folglich gilt $|EG| = |HF|$ q.e.d.