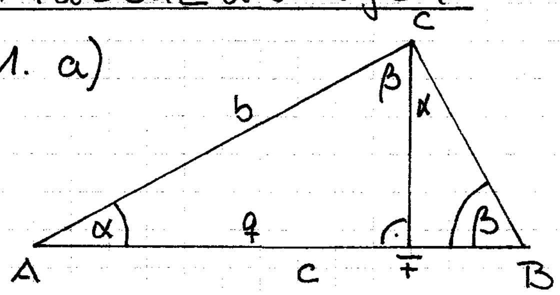
Peitgen/Albers, Ausgewählte Anwendungen d. Mathem.
9. Übung, Lösungsskizzen WiSe 07/08

Präsenzübungen

1. a)



Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn entsprechende Winkel gleich groß sind. Wegen der Winkelsumme im Dr. genügt es, zwei entsprechende Winkelpaare zu vergleichen. Sind $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ und $|\sphericalangle CBA| = \beta$, so wird der rechte Winkel bei C durch die Höhe $\overline{CF}$ ebenfalls in α und β zerlegt.

Jedes der drei Dreiecke ABC, AFC und FBC hat also drei Winkel der Größen α, β und $90°$ und sind somit ähnlich zueinander.

b) $\Delta AFC \sim \Delta ABC \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{b} = \frac{b}{c} \quad \left(\frac{\text{lange Kathete}}{\text{Hypotenuse}}\right)$

$\Rightarrow \quad qc = b^2 \quad ①$

$\Delta FBC \sim \Delta ABC \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{a} = \frac{a}{c} \quad \left(\frac{\text{kurze Kathete}}{\text{Hypotenuse}}\right)$

$\Rightarrow \quad pc = a^2 \quad ②$

① und ② addieren: $a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q)c$
$= c^2$

2. Auswahl von 2 Dingen aus 6 ohne Zurücklegen (man darf ja nicht eine Seite zwei Mal angeben) und ohne Berücks. d. Reihenfolge (es ist egal, welche Seitenlänge zuerst angegeben wird). $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Es gibt 15 Aufgabentypen

Hausübungen

a) $a = 7{,}5\,cm \qquad q = 8\,cm$ (alle Zahlen beziehen sich auf cm)

Kathetensatz: $a^2 = pc = p(p+q) = p^2 + pq$

Also $p^2 + 8p = 7{,}5^2$

$\underline{\underline{p = 4{,}5}}$ (oder $p = -12{,}5$ nicht sinnvoll)

$a^2 = pc \Rightarrow c = \dfrac{a^2}{p} = \dfrac{7{,}5^2}{4{,}5} \quad \underline{\underline{c = 12{,}5}}$

$q = c - p = 12{,}5 - 4{,}5 \qquad \underline{\underline{q = 8}}$

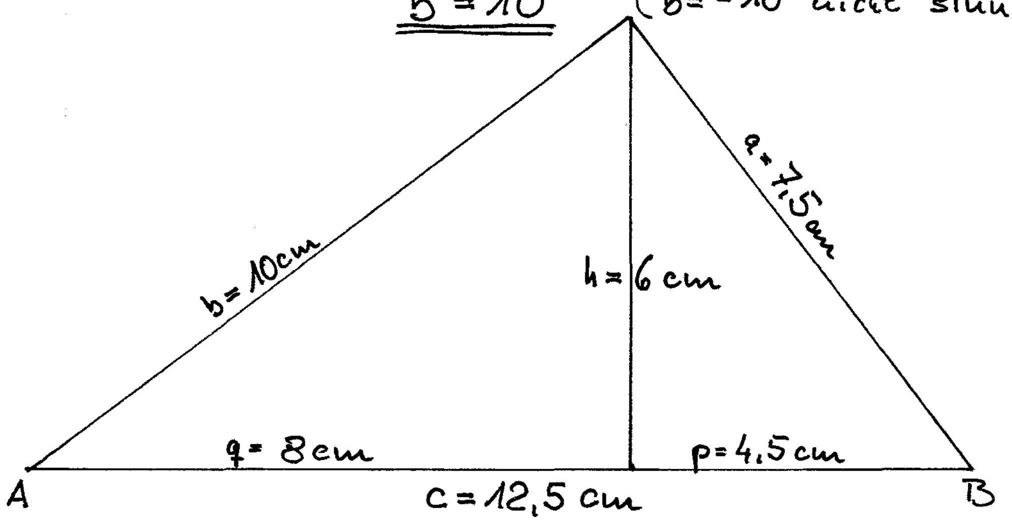
$h^2 = pq$ (Höhensatz) $\quad h^2 = 4{,}5 \cdot 8 = 36$

$\underline{\underline{h = 6}}$ ($h = -6$ nicht sinnvoll)

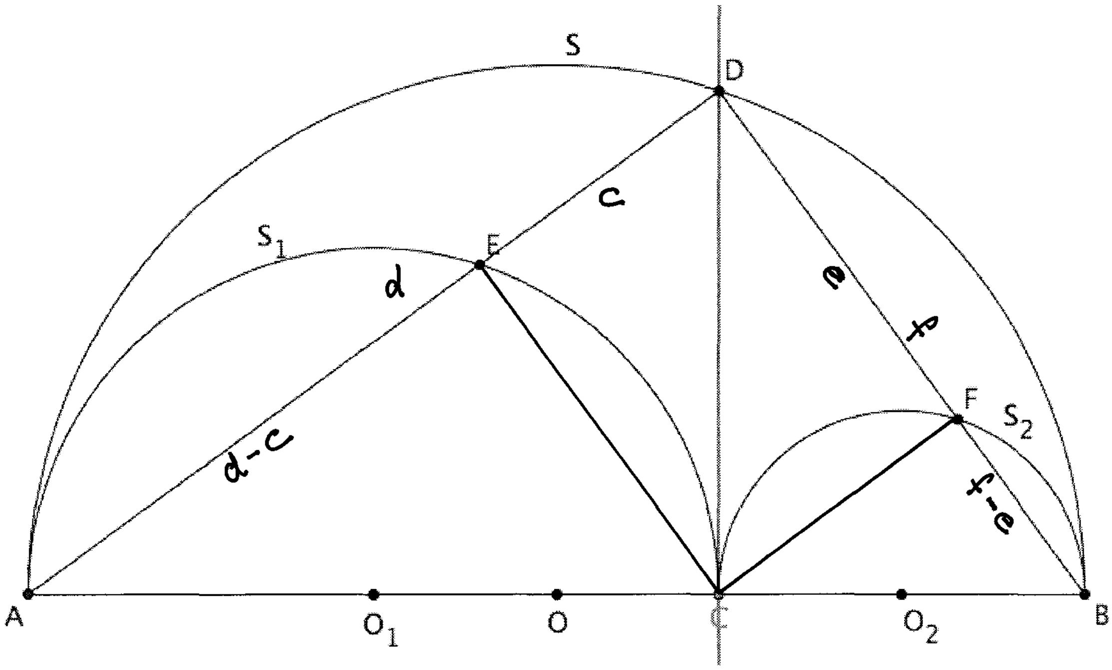
Pythagoras: $b^2 = c^2 - a^2 = 12{,}5^2 - 7{,}5^2 = 100$

$\underline{\underline{b = 10}}$ ($b = -10$ nicht sinnvoll)

b)



2 a)



b) E ist ein Punkt auf dem Thaleskreis über $\overline{AC}$.
Also ist $|\sphericalangle AEC| = 90°$.
Ebenso ist F ein Punkt des Thaleskreises über $\overline{CB}$

c) Zur Abkürzung und leichteren Lesbarkeit sei
$|DE| = c$, $|DA| = d$, $|DF| = e$, $|DB| = f$
Dann ist die Behauptung: $cd = ef = 4ab$

Beweis:

Höhensatz im ΔABD: $|AC| \cdot |CB| = |CD|^2$

Also $|CD|^2 = 2a \cdot 2b = 4ab$ $\quad |CD| = 2\sqrt{ab}$

2. Strahlensatz mit Zentrum A und $|EC| = e$

$$\frac{e}{f} = \frac{2a}{2a+2b} = \frac{a}{a+b} \quad \Big| \cdot f^2$$

$$ef = f^2 \frac{a}{a+b} \quad (1)$$

Pythagoras im ΔCBD: $|CD|^2 + |CB|^2 = |BD|^2$

$4ab + 4b^2 = f^2$ also $f^2 = 4b(a+b)$ (2)

(2) in (1) einsetzen:

$$\underline{\underline{ef}} = 4b(a+b)\frac{a}{a+b} = \underline{\underline{4ab}}$$

Ebenso rechnet man „auf der linken Seite"
mit c und d:

2. Strahlensatz, Zentrum B und $|CF| = c$

$$\frac{c}{d} = \frac{2b}{2a+2b} = \frac{b}{a+b} \quad | \cdot d^2$$

$$cd = d^2 \frac{b}{a+b}$$

Pythagoras im ΔACD liefert entspr.

$$d^2 = 4a(a+b)$$

Einsetzen: $\underline{\underline{cd}} = 4a(a+b)\frac{b}{a+b} = \underline{\underline{4ab}}$

Damit ist die gesamte Behauptung gezeigt.

2. Lösungsweg (sehr viel eleganter)

Kathetensatz im ΔACD, Kathete $\overline{CD}$, Hypotenusenabschnitt $|ED| = c$: $cd = |CD|^2$

Kathetensatz im ΔCBD, ... liefert

$$ef = |CD|^2$$

$|CD|$ berechnet man wie oben mit dem Höhensatz im ΔABD $\quad |CD| = 2\sqrt{ab}$

Also gilt die Behauptung $cd = ef = 4ab$

3. a) Die Kette besteht aus 9 einstelligen,
90 zwei- und 900 dreistelligen Zahlen
$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 = 2889$ Es sind 2889 Ziffern

b) Ähnlich wie a) Bis zu dieser Stelle stehen
9 ein-, 90 zwei- und 218 dreistellige Zahlen
(100 bis 317 sind 218 Zahlen)
$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 218 \cdot 3 = 843$
Diese „7" steht an der 843. Stelle

c) Da $300 > 189$, ist Platz 300 im Bereich der dreistelligen Zahlen.

$300 = 189 + 111 \qquad 111 = 3 \cdot 37$

Also ist Platz 300 die letzte Ziffer der 37. dreistelligen Zahl. Das ist 136. Also steht an Platz 300 eine „6".

4. $0{,}1\overline{23}_7 = 0{,}1232323\ldots_7$

$$= 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{7}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{7}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{7}\right)^5 + \cdots$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{7} + (2 \cdot 7 + 3)\left(\frac{1}{7}\right)^3 + (2 \cdot 7 + 3)\left(\frac{1}{7}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{1}{7} + 17\left[\left(\frac{1}{7}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}\right)^5 + \left(\frac{1}{7}\right)^7 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{7} + 17 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \left[1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{17}{343} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{49}}$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{17}{\cancel{343}_{\,7}} \cdot \frac{\cancel{49}}{48} = \frac{48 + 17}{7 \cdot 48} = \underline{\underline{\frac{65}{336}}}$$

$$= \underline{\underline{0{,}1934\overline{523809}}}$$