Peitgen / Albers, Ausgewählte Anwendungen d. Mathem.
8. Übung, Lösungsskizzen, WiSe 07/08

Präsenzübungen

1.a) $a_{n+1} = 2(a_n + 1) - a_{n-1}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 7$

$a_3 = 2 \cdot 8 - 4 = 12$, $a_4 = 2 \cdot 13 - 7 = 19$

$a_5 = 2 \cdot 20 - 12 = 28$, $a_6 = 2 \cdot 29 - 19 = 39$

b) Anfangsbed.: $a_1 = 1^2 + 3 = 4$ ✓ $a_2 = 2^2 + 3 = 7$ ✓

Rekursion: $2(a_n + 1) - a_{n-1}$

$$= 2(n^2 + 3 + 1) - [(n-1)^2 + 3]$$
$$= 2n^2 + 8 - [n^2 - 2n + 1 + 3]$$
$$= n^2 + 2n + 4$$
$$= \underbrace{n^2 + 2n + 1} + 3$$
$$= (n+1)^2 + 3 = a_{n+1}$$

Da für $a_n = n^2 + 3$ die Anfangsbedingungen und die Rekursion erfüllt sind, ist $a_n = n^2 + 3$ die geschlossene Darstellung zur rekursiv definierten Folge a.

2. Zu zeigen ist: Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < m$ gilt

$$k \xrightarrow{\cdot(m-1)} \ast \xrightarrow{\cdot(m-1)} k$$

Beweis: Die Behauptung ist äquivalent zu

$$k \cdot (m-1) \cdot (m-1) \equiv k \mod m$$
$$\Leftrightarrow k \cdot (m^2 - 2m + 1) \equiv k \mod m$$
$$\Leftrightarrow k \cdot 1 \equiv k \mod m, \text{ da}$$
$$m^2 \equiv 0 \mod m \text{ und } 2m \equiv 0 \mod m$$

Letztes ist offensichtlich richtig, also auch die Behauptung.

Hausübungen

1 a) Für die n-te Fibonaccizahl F_n gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

b) i) $\phi_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ $\qquad\qquad$ $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

und es gilt $\phi_{1,2}^2 = 1 + \phi_{1,2}$

$$\phi_1^6 = \phi_1^2 \cdot \phi_1^2 \cdot \phi_1^2 = (1+\phi_1)^3 = 1 + 3\phi_1 + 3\phi_1^2 + \phi_1^3$$

$$= 1 + 3\phi_1 + 3(1+\phi_1) + \phi_1(1+\phi_1)$$

$$= 4 + 6\phi_1 + \phi_1 + (1+\phi_1)$$

$$= 5 + 8\phi_1$$

also auch $\phi_2^6 = 5 + 8\phi_2$

$$F_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(5 + 8\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(5 + 8\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[4\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right]$$

$$F_6 = 8$$

ii) $$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\,(1+\sqrt{5})^6$$

$$= \frac{1}{64}\left(1 + 6\sqrt{5} + 15\cdot 5 + 20\cdot 5\cdot\sqrt{5} + 15\cdot 5^2 + 6\cdot 5^2\cdot\sqrt{5} + 5^3\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(1 + 75 + 375 + 125 + 6\sqrt{5} + 100\sqrt{5} + 150\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(576 + 256\sqrt{5}\right)$$

$$= 9 + 4\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\,(1-\sqrt{5})^6$$

$$= \frac{1}{64}\left(1 - 6\sqrt{5} + 15\cdot 5 - 20\cdot 5\cdot\sqrt{5} + 15\cdot 5^2 - 6\cdot 5^2\sqrt{5} + 5^3\right)$$

$$= 9 - 4\sqrt{5}$$

also

$$F_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5}) - (9-4\sqrt{5})\right]$$

$$F_6 = 8$$

c) Näherungsrechnung

$$F_6 \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 \approx 0{,}4472 \cdot 1{,}618^6 \approx 8{,}024$$

also ist $F_6 = 8$

2. a) $200 = 16 \cdot 12 + 8$ Also ist es 11 Uhr.

b) $300 = 12 \cdot 24 + 12$ Also ist es 3 Uhr früh morgens.

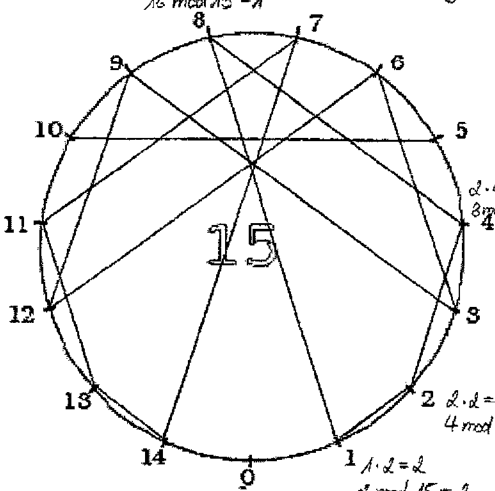
c) $100 = 14 \cdot 7 + 2$ Also ist es Mittwoch.

d) $365 = 52 \cdot 7 + 1$ Nach einem Nicht-Schaltjahr ist für jedes Datum der Wochentag um einen weitergewandert. Es ist dann ein Montag. Nach einem Schaltjahr ist es ein Dienstag.

Die Diagramme müssen symmetrisch sein!!!

3

$2 \cdot 8 = 16$
$16 \bmod 15 = 1$

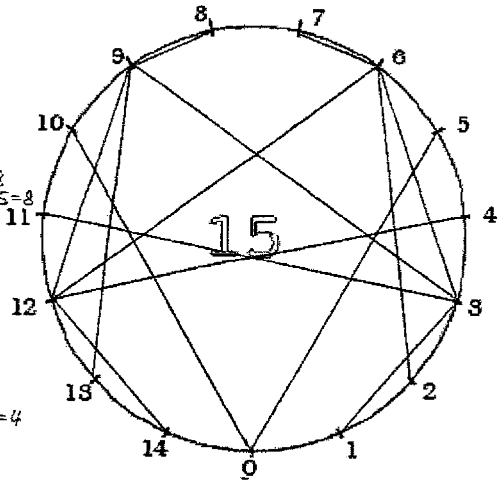


$2 \cdot 4 = 8$
$8 \bmod 15 = 8$

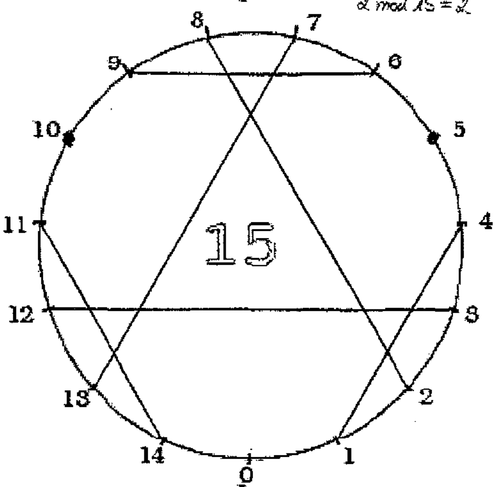
$2 \cdot 2 = 4$
$4 \bmod 15 = 4$

$1 \cdot 2 = 2$
$2 \bmod 15 = 2$

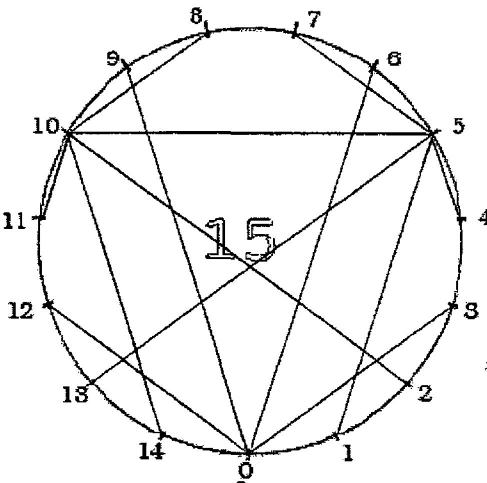
$f = 2$ bzw. 8
$\rightarrow \cdot 2 \bmod 15$
bzw.
$\cdot 8 \bmod 15$



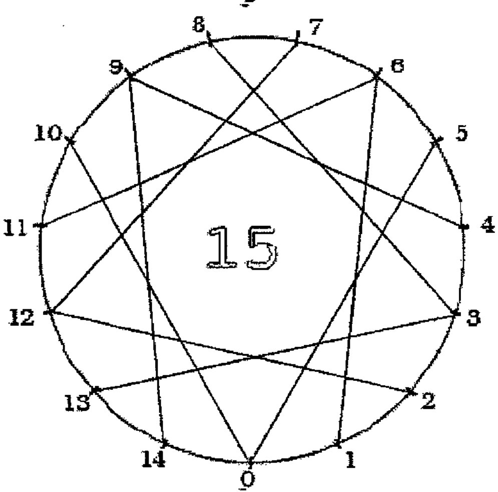
$f = 3$
$\rightarrow \cdot 3 \bmod 15$



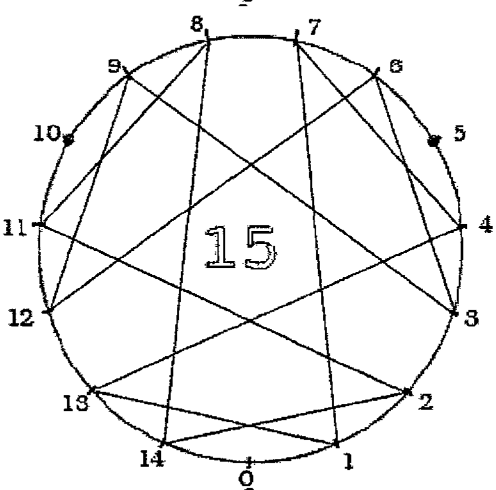
$f = 4$
$\rightarrow \cdot 4 \bmod 15$



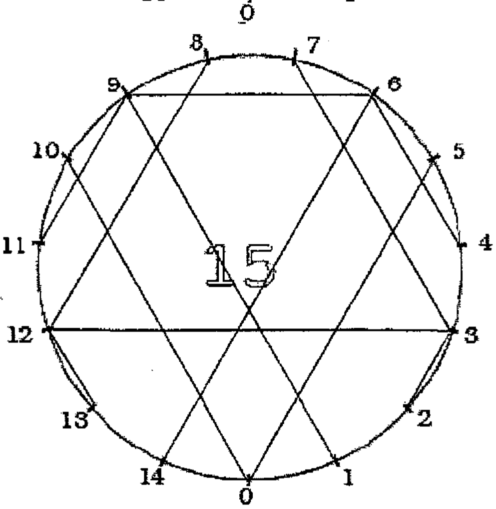
$f = 5$
$\rightarrow \cdot 5 \bmod 15$



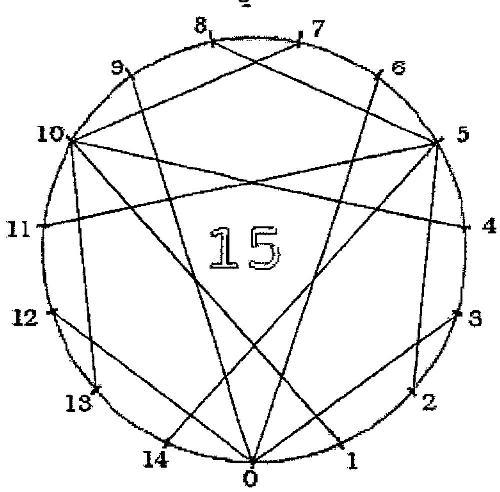
$f = 6$
$\rightarrow \cdot 6 \bmod 15$



$f = 7$ bzw. 13
$\rightarrow \cdot 7 \bmod 15$
bzw.
$\cdot 13 \bmod 15$



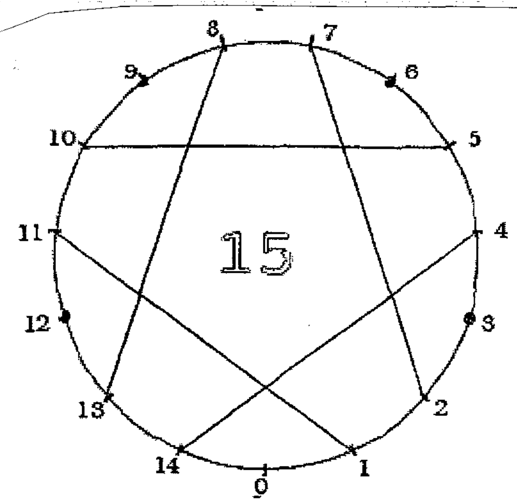
$f = 9$
$\rightarrow \cdot 9 \bmod 15$

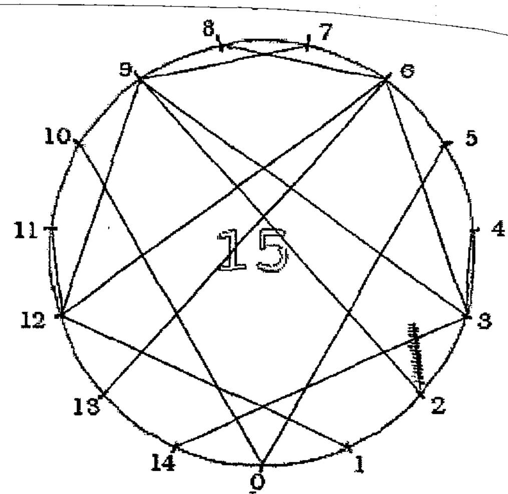


$f = 10$
$\rightarrow \cdot 10 \bmod 15$

$f = 11$

$\rightarrow \cdot 11 \bmod 15$



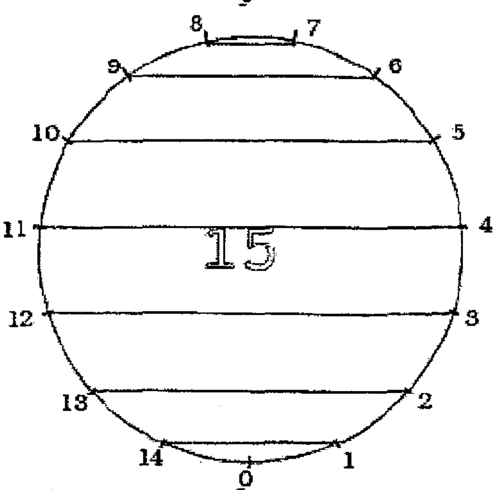


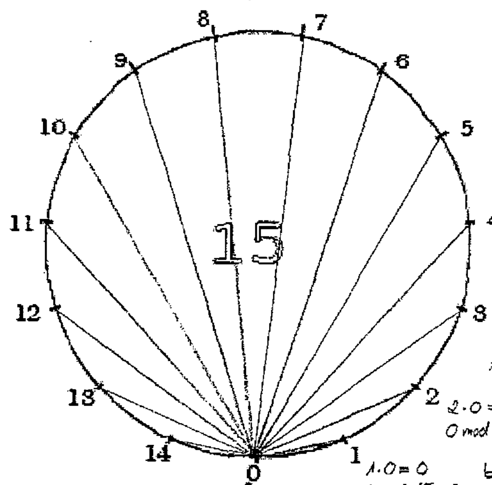
$f = 12$

$\rightarrow \cdot 12 \bmod 15$

$f = 14$

$\rightarrow \cdot 14 \bmod 15$





$f = 0$ bzw. 15

$3 \cdot 0 = 0$ bzw. $3 \cdot 15 = 45$

$0 \bmod 15 = 0$ $\quad 45 \bmod 15 = 0$

$2 \cdot 0 = 0$ bzw. $2 \cdot 15 = 30$

$0 \bmod 15 = 0$ $\quad 30 \bmod 15 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$ bzw. $1 \cdot 15 = 15$

$0 \bmod 15 = 0$ $\quad 15 \bmod 15 = 0$

4. $0{,}\overline{2}_5 = 0{,}2222\ldots_5$

$$= 2 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots$$

$$= \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$