Peitgen / Albers, Ausgewählte Anwendungen d. Math.

7. Übung, Lösungsskizzen. WiSe 07/08

Präsenzübungen

1. „Stil": Zahlen in einer Spalte von Zeile $n=k$ bis zu einer beliebigen höheren Zeile $n=k+m$

„Kelle": Feld in der Zeile $n=k+m+1$ und eine „Spalte" weiter, also $k+1$

$$\sum_{n=k}^{m+k} \binom{n}{k} = \binom{m+k+1}{k+1}$$

Beginnt nun der Stil nicht in Zeile k, sondern darunter in Zeile $k+l$ und geht bis Zeile $k+m > k+l$, so gilt

$$\sum_{n=k+l}^{k+m} \binom{n}{k} = \sum_{n=k}^{k+m} \binom{n}{k} - \sum_{n=k}^{k+l-1} \binom{n}{k}$$

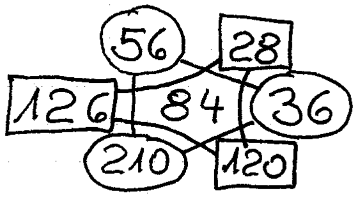
$$= \binom{m+k+1}{k+1} - \binom{k+l}{k+1}$$

Man geht also von der untersten Zelle $\binom{k+m}{k}$ eine Zeile nach unten und eine „Spalte" nach rechts (normale „Kelle") und zieht davon die Zelle ab, die in der Startzeile rechts neben der Startzelle steht.

Im Beispiel: $21 + 56 + 126 + 252 + 462 = 917$

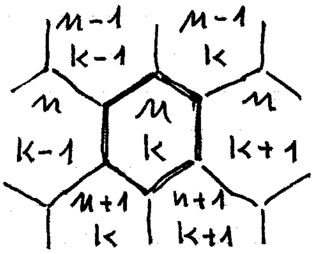
$924 - 7 = 917$

2. 2. Beispiel:



$$56 \cdot 36 \cdot 210 = 423360 \qquad 126 \cdot 28 \cdot 120 = 423360$$

allgemein:



Man bildet um $\binom{n}{k}$ die „Blume".

Dann sind die beiden Produkte:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$\binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

Im Zähler stehen $(n-1)!$, $n!$ und $(n+1)!$

Im Nenner stehen $(k-1)!$, $k!$ und $(k+1)!$ und dann noch $(n-k-1)!$, $(n-k)!$ und $(n-k+1)!$

Beide Produkte sind gleich.

Hausübungen

1. Die Zahlen stehen in der „Spalte" für $k=3$

Also gilt $\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = \frac{(n+2)(n+1)\,n}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$$= \frac{n}{3!}\left[(n+2)(n+1) - (n-1)(n-2)\right]$$

$$= \frac{n}{3!}\left[(n^2+3n+2) - (n^2-3n+2)\right]$$

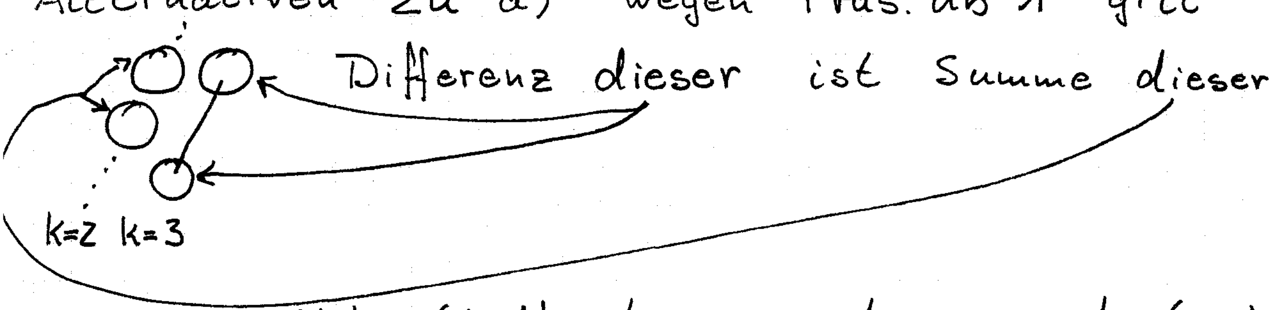
$$= \frac{n}{3!}\; 6n$$

$$= n^2$$

Die obere der beiden Zellen bestimmt also die Zahl, die quadriert wird

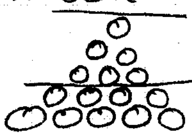
b) Folglich ergibt sich $625 = 25^2$ als
$$\binom{27}{3} - \binom{25}{3} = 2925 - 2300 = 625$$

Alternativen zu a) Wegen Präs. Üb 1 gilt



also $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2} n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{2} n\big((n-1)+(n+1)\big)$

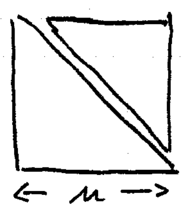
oder <u>anschaulich</u>: Spalte $k=3$ sind Tetraederzahlen. Differenz der $(n+2)$-ten minus n-ten ergibt die unteren beiden Schichten.



} abziehen

} 2 Schichten, jede ein(e) Dreieck(szahl)

Zwei Dreiecke



2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Summe aller Zahlen in Zeile n des Pascalschen Dreiecks ist Zweierpotenz

Beweis mit vollständiger Induktion über n.

Ind. Anfang $n=1$: $1+1 = 2 = 2^1$

Ind. Vorauss.: Summe aller Zahlen in Zeile n ist Zweierpotenz

Ind. Beh.: Summe aller Zahlen in Zeile $n+1$ ist Zweierpotenz

Ind. Beweis:

Zeile n:

Jede Zahl der n.ten Zeile wird zwei Mal in der Bildung der Zahlen in Zeile n+1 verwendet. Also ist die Summe aller Zahlen der Zeile n+1 das Doppelte der Summe aller Zahlen der Zeile n.
Das Doppelte einer Zweierpotenz ist wieder eine Zweierpotenz. q.e.d.

3. Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Setze $a=1$ und $b=-1$

$$(1+(-1))^n = 0^n = 0 = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot(-1) + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

Also erhalten die Binomialkoeffizienten alternierende Vorzeichen.

4. a) Zeile für $n=7$: $1, \underbrace{7, 21, 35, 35, 21, 7,}_{\text{durch 7 teilbar}} 1$

b) $$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

p ist als Primzahl nur durch 1 und p teilbar. Also verschwindet p nur, wenn es in k! eine Zahl gibt, die p als Teiler hat. Wegen $k \le p-1$, ist jede Zahl in k! kleiner als p. Folglich ist p nicht Teiler von k!. Also bleibt p explizit als Faktor erhalten.

5. $0,\overline{1}_3 = 0,11111\ldots_3$

$$= 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{9} + 1\cdot\frac{1}{27} + 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right)$$

geometrische Reihe mit $a_0 = 1$ und $q = \frac{1}{3}$

Also existiert der Grenzwert der unendlichen Reihe

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Also: $0,\overline{1}_3 = \frac{1}{2}_{10}$