Peitgen/Albers, Ausgewählte Anwendungen d. M.

6. Übung, Lösungsskizzen, WiSe 07/08

1 a) a_k beschreibt offensichtlich die Quadratzahlen

$a_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$

rekursiv: $a_k = a_{k-1} + 2(k-1) + 1 \qquad a_1 = 1$

$\qquad\qquad = a_{k-1} + 2k - 1$

$b_k = (k-1)(k+1) = k^2 - 1 \qquad k = 2, 3, 4, \dots$

rekursiv: $b_k = b_{k-1} + k + k - 1 \qquad b_2 = 3$

$\qquad\qquad = b_{k-1} + 2k - 1$

$c_k = (k-2)(k+2) = k^2 - 4 \qquad k = 3, 4, 5, \dots$

rekursiv: $c_k = c_{k-1} + k + 1 + k - 2 \qquad e_3 = 5$

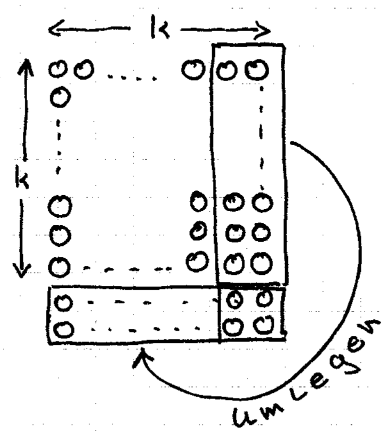
$\qquad\qquad = c_{k-1} + 2k - 1$

$d_k = (k-3)(k+3) = k^2 - 9 \qquad k = 4, 5, 6, \dots$

rekursiv: $d_k = d_{k-1} + k + 2 + k - 3 \qquad d_4 = 7$

$\qquad\qquad = d_{k-1} + 2k - 1$

b) c_k:



Rechteck $2 \times k$ Punkte

neue kurze Seite: $k-2$

neue lange Seite: $k+2$

unten rechts sind 2×2 Punkte zu viel

analog mit b_k: $k \to k-1$, $k \to k+1$ unten rechts ist ein Punkt zu viel

2. $0{,}123_5 = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} = \frac{25+10+3}{125} = \frac{38}{125} = 0{,}304$$

Hausübungen

1 a) b) Spalte C legt nahe, dass die Werte konvergieren.

	A	B	C
1	k	ak	ak-1/ak
2	1	1	
3	2	1	1
4	3	1	1
5	4	2	0,5
6	5	3	0,6666667
7	6	4	0,7500000
8	7	6	0,6666667
9	8	9	0,6666667
10	9	13	0,6923077
11	10	19	0,6842105
12	11	28	0,6785714
13	12	41	0,6829268
14	13	60	0,6833333
15	14	88	0,6818182
16	15	129	0,6821705
17	16	189	0,6825397
18	17	277	0,6823105
19	18	406	0,6822660
20	19	595	0,6823529
21	20	872	0,6823394

Formel in Spalte B, Zeile 5: =B4+B2
Formel in Spalte C, Zeile 3: =B2/B3

c) (1) → (2) (1) wird durch a_k dividiert

(2) → (3) Die beiden Brüche werden ersetzt durch „1 durch Kehrwert"

(3) → (4) a_k wird ersetzt durch $a_{k-1} + a_{k-3}$

(4) → (5) Der mittlere Bruch $\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}$ wird ersetzt durch „1 durch Kehrwert"

(5) → (6) Alle drei Teilbrüche haben nun die Form $\frac{\text{Folgenglied}}{\text{nächstes Folggl.}}$

Unter der Annahme, dass diese Brüche einen Grenzwert haben, kann man diesen ersetzen (=x) um ihn letztlich zu berechnen.

d) $\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = 1 + \frac{x}{1+x^2} \qquad | \cdot x(1+x^2)$

$$1 + x^2 = x(1+x^2) + x^2$$

$$1 + x^2 = x + x^3 + x^2 \iff \underline{\underline{x^3 + x - 1 = 0}}$$

e) $x \approx \frac{a_{19}}{a_{20}} = \frac{595}{872}$

$$\left(\frac{a_{19}}{a_{20}}\right)^3 + \frac{a_{19}}{a_{20}} - 1 = \left(\frac{595}{872}\right)^3 + \frac{595}{872} - 1$$

$$= \frac{663073355}{663054848} - 1$$

$$= \frac{18507}{663054848}$$

$\approx 0{,}0000279$ also dicht bei 0.

2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
S_n	1	2	4	7	12	20	33	54		

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $S_n = F_{n+2} - 1$

Beweis durch vollständige Induktion über n:

I-Anfang $n = 1$ $S_1 = 1$ $F_3 = 2$ $F_3 - 1 = 1 = S_1$ ✓

I-Vorauss: $S_n = F_{n+2} - 1$

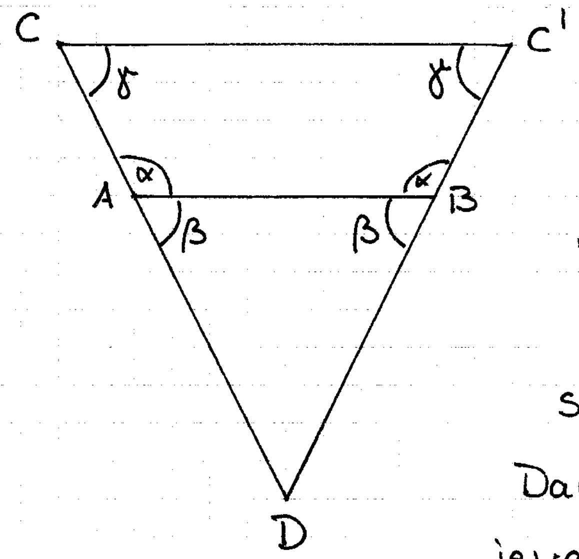
I-Behaupt: $S_{n+1} = F_{n+3} - 1$

I-Beweis:
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + F_{n+1} && \text{I-Vorauss.} \\ &= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \\ &= \underbrace{F_{n+2} + F_{n+1}} - 1 && \text{Def. der Fibonacci-Z.} \\ &= F_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

q.e.d.

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $S_n = F_{n+2} - 1$

3.



Nach Vorauss. gilt

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle C'BA = \alpha$

Verlängere $\overline{CA}$ über A und $\overline{C'B}$ über B.

Schnittpunkt sei D

Dann sind $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABD$ jeweils Nebenwinkel zu α, also gleich groß mit $\alpha + \beta = 180°$ (*)

Also ist $\triangle DBA$ gleichschenklig, also $|DA| = |DB|$.

Mit $|CA| = |BC'|$ folgt $|DC| = |DC'|$. Also sind $|\sphericalangle DCC'| = |\sphericalangle CC'D| = \gamma$ (Basiswinkel im $\triangle DC'C$)

Winkelsumme im Viereck $ABC'C$: $2\alpha + 2\gamma = 360°$

$\Rightarrow \alpha + \gamma = 180°$ Mit (*) folgt $\beta = \gamma$.

Da β und γ Stufenwinkel, sind es also Stufenwinkel an den beiden Parallelen AB und CC'. q.e.d.

4.

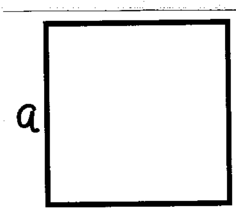


Bild 1

Ein Quadrat mit der Kantenlänge a

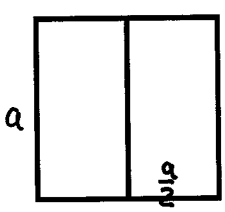


Bild 2

Das Quadrat wird in zwei Rechtecke zerteilt, kurze Seite ist $\frac{a}{2}$

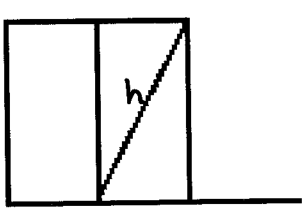


Bild 3

Die Diagonale h wird in ein Rechteck gezeichnet

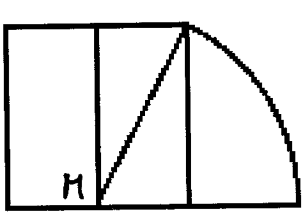


Bild 4

Um den Mittelpunkt M wird der Kreisbogen mit h gezeichnet

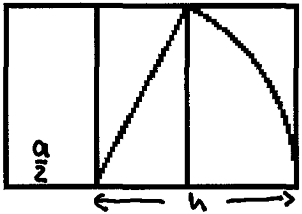


Bild 5

Die Figur wird zu einem großen Rechteck ergänzt.

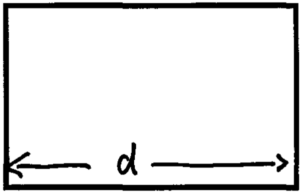


Bild 6

Die Konstruktionslinien werden weggenommen.

Behauptung $d = \frac{a}{2} + h = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$ (Diagonale im Fünfeck)

Bild 3: $h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{5}{4} a^2$

Also $h = \frac{a}{2} \sqrt{5}$

Dann ist $d = \frac{a}{2} + h = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$