Peitgen/Albers, Ausgewählte Anwendungen d. Math.

5. Übung, Lösungsskizzen, WiSe 07/08

Präsenzübung

a) $a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 13 \quad a_5 = 21 \quad a_6 = 34$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 5 \quad 6 \quad 11 \quad 17 \quad 28$

a_6 wird um 3 größer/kleiner

b) $a_1 = 2 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 14 \quad a_5 = 22 \quad a_6 = 36$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 6 \quad 10 \quad 16 \quad 26$

a_6 wird um 5 größer/kleiner

Allgemeine Betrachtung

$a_1 = a \quad a_2 = b \quad a_3 = a+b \quad a_4 = a+2b \quad a_5 = 2a+3b$

$a_6 = 3a + 5b$

Hier sieht man: Eine Änderung von a_1 tritt in a_6 dreifach auf, eine Änderung von a_2 erscheint fünffach

c) $a_6 = 3a + 5b = 100$

$\Leftrightarrow \quad 3a = 100 - 5b = 5(20 - b)$

Also muss für $a \in \mathbb{Z}$ a durch 5 teilbar sein

i)

$a_1 = a$	5	10	15	20	25	30
$a_2 = b$	17	14	11	8	5	2

z.B. 15, 11, 26, 37, 63, 100

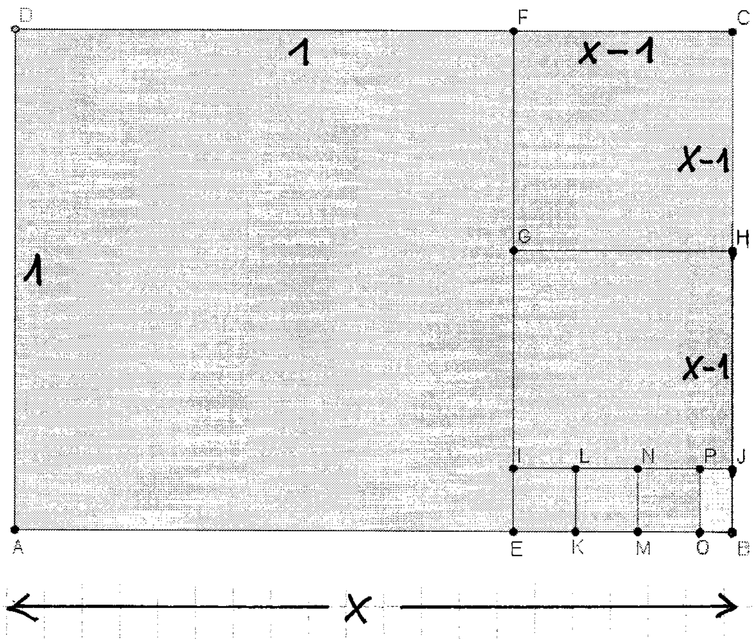
ii)

$a_1 = a$	-5	-10	-15	-20	...
$a_2 = b$	23	26	29	32	...

z.B. -5, 23, 18, 41, 59, 100

Hausübungen

1.



$$|OB| = (x-1) - 3(3-2x)$$
$$= x - 1 - 9 + 6x$$

$$|JB| = 1 - 2(x-1)$$
$$= 3 - 2x$$

$\square EBCF \sim \square OBJP$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{7x-10}{3-2x}$$

$$(x-1)(3-2x) = 7x - 10$$

$$3x - 3 - 2x^2 + 2x = 7x - 10$$

$$-2x^2 - 2x = -7$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{15} - \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \underbrace{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{15}}_{\text{hier nicht sinnvoll}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{15} - 1\right) \approx 1{,}44$$

2. $x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$ x_1

also $x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_1}}$

$x_1 = 1 + \dfrac{x_1}{2x_1 + 1}$

$$x_1(2x_1 + 1) = 2x_1 + 1 + x_1$$
$$2x_1^2 + x_1 = 3x_1 + 1$$
$$2x_1^2 - 2x_1 = 1$$
$$x_1^2 - x_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}$$
$$\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$
$$x_1 - \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder $\underbrace{x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}}_{\text{hier nicht sinnvoll}}$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

$$x_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

absoluter Fehler: $x_2 - x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

relativer Fehler: $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) : \left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)\right)$

$\approx -0{,}0327 : 1{,}366$

$\approx -0{,}0239$

Nähert man $[1; \overline{2,1}]$ durch den endlichen Kettenbruch $[1; 2, 1]$, so ist der relative Fehler etwa $-2{,}4\,\%$, d.h. die Näherung ist etwas zu klein.

3.
$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \underbrace{\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}}}_{y}}$$

Wegen der Periodizität gilt:

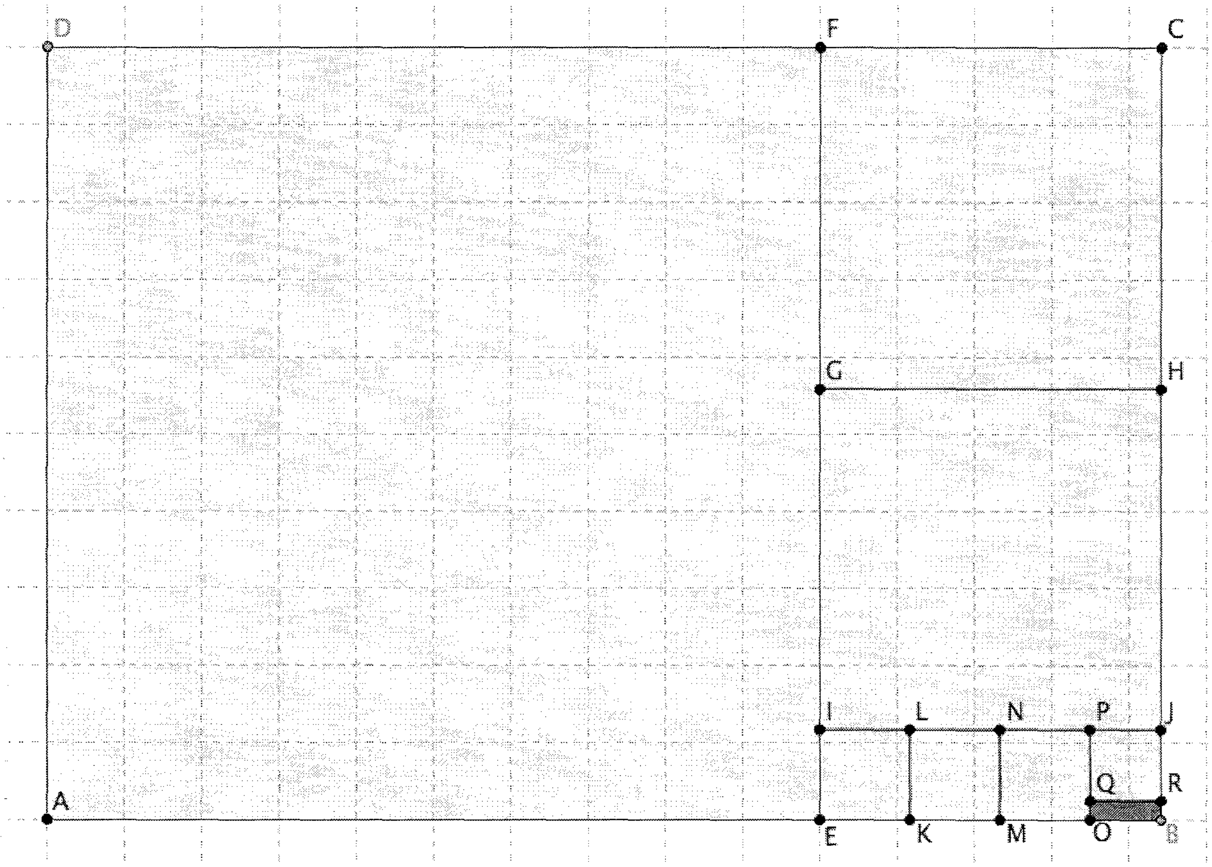
$$y = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1+y}} = \frac{1+y}{3+3y+1}$$

$$y \cdot (3y+4) = y+1 \quad \text{Rechner}$$
$$3y^2 + 4y = y + 1 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21} \quad \text{oder} \quad \underbrace{y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}}_{\text{hier nicht sinnvoll}}$$

Also: $y = \frac{1}{6}(\sqrt{21} - 3)$

Einsetzen in x

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}(\sqrt{21} - 3)} \overset{\text{Rechner}}{=} \frac{1}{10}\left(19 - \sqrt{21}\right) \approx \frac{1}{10} \cdot 14{,}417$$



Das Rechteck OBRQ ist ähnlich zu $\square$ EBJI

4 a) Eine Strecke wird im goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis des größeren Abschnitts (Major) zur Gesamtstrecke das gleiche ist wie das Verhältnis von Minor (kleineres Teil) zum Major.

b) $\frac{\text{Major}}{\text{Gesamtstr.}}$ ist doppelt so groß wie $\frac{\text{Minor}}{\text{Major}}$

also Gleichung:

$$\frac{\text{Major}}{\text{Gesamtstr.}} = 2 \cdot \frac{\text{Minor}}{\text{Major}}$$

Major $= x$, Gesamtstr $= 1$

$$\frac{x}{1} = 2\,\frac{1-x}{x} \Rightarrow x^2 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2 + 1$$

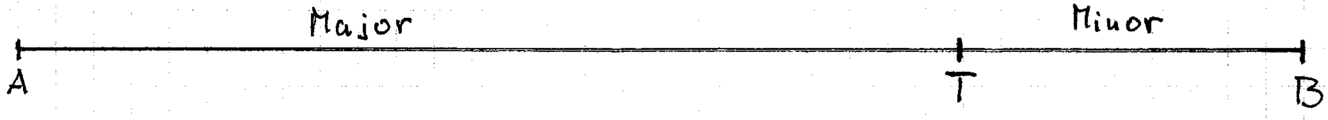
$$\Rightarrow (x+1)^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1 \text{ oder } \underbrace{x = -\sqrt{3} - 1}_{\text{hier nicht sinnvoll}}$$

In diesem Fall ist der Major $\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}732$

Probe: $\frac{\text{Major}}{\text{Ges. str.}} = \sqrt{3} - 1$

$$\frac{\text{Minor}}{\text{Major}} = \frac{1 - (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} - 3 + 2 - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$



$|AT| \approx 17\,\text{cm} \cdot 0{,}732 \approx 12{,}44\,\text{cm}$