Peitgen/Albers, Ausgewählte Anwendungen d. Math.

4. Übung, Lösungsskizzen WiSe 07/08

1. Offensichtlich ist $d = 13$

Dann gilt $a_k = k \cdot 13 + 44$

Letzter Summand: $a_n = n \cdot 13 + 44 = 785$

$$13n = 741$$
$$n = 57$$

Damit gilt:

$$57 + 70 + 83 + \dots 785$$
$$= (1 \cdot 13 + 44) + (2 \cdot 13 + 44) + (3 \cdot 13 + 44) + \dots + (57 \cdot 13 + 44)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 57) \cdot 13 + 57 \cdot 44$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 57 \cdot 58 \cdot 13 + 57 \cdot 44$$
$$= 57 \cdot (29 \cdot 13 + 44) = 57 \cdot 421 = 23.997$$

2 a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ also $a = 2$ $b = 3$ $c = 6$

$$b + c = 9 \neq 2 = a$$

b) $a = b + c$ und $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

einsetzen $\frac{1}{b+c} = \frac{b+c}{b \cdot c}$

$$\Rightarrow bc = (b+c)^2$$

auflösen nach b als Funktion von c

$$bc = b^2 + 2bc + c^2$$
$$b^2 + bc + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = -c^2 + \frac{c^2}{4} \quad | \text{q.E.}$$
$$\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} c^2$$

Hier gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$.

2c) $$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{bc}{b+c}$$

3a)

$$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2)$$

Wiederholung

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{2+\sqrt{7}}{3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-1}{3}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-1}{2}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{7}}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2+\sqrt{7}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \sqrt{7}-2}}}}$$

also $\sqrt{7} = [2; \overline{1,1,1,4}]$

b) $$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \qquad x - 3 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \underbrace{\cfrac{1}{1+\ddots}}_{= x-3}}}$$

also geschlossener Ansatz

$$x - 3 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + (x-3)}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x+3}}$$

$$x-3 = \frac{x+3}{x+3+1}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+4) = x+3$$

$$x^2 + x - 12 = x+3$$

$$x^2 = 15$$

$$x = \sqrt{15} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{15}$$

Da der Kettenbruch offensichtlich eine positive Zahl ist, kommt nur die Lösung $x = \sqrt{15}$ in Frage.

$$\sqrt{15} = [3; \overline{1,6}]$$

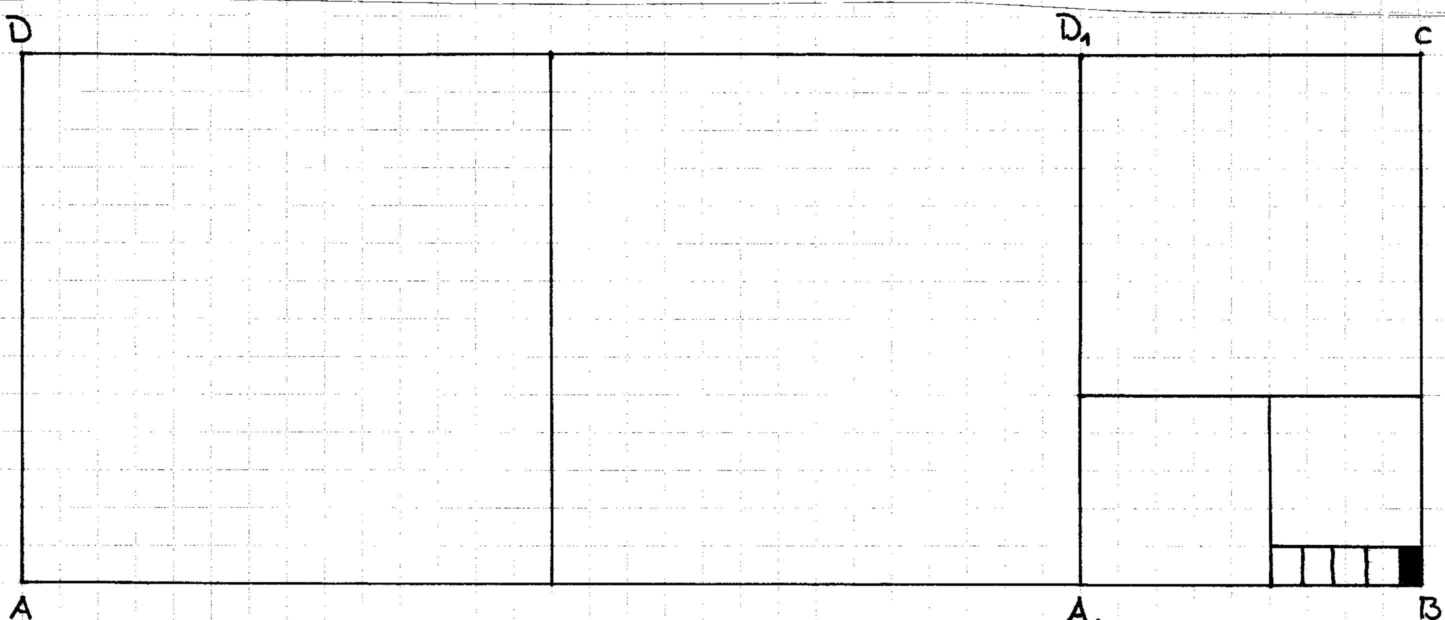
4.

Vorbereitung

$\sqrt{7} \approx 2{,}64575$ Ein DIN A4 Blatt ist ca. 20cm breit

$20 : \sqrt{7} \approx 7{,}5$ also $1 \mathrel{\hat{=}} 7\,\text{cm}$

oder $7 \cdot \sqrt{7} \approx 18{,}5$ $\sqrt{7} \mathrel{\hat{\approx}} 18{,}5\,\text{cm}$



Man sieht deutlich die Ausschöpfung durch Quadrate: 2, 1, 1, 1, 4

Es bleibt dann ein Restrechteck [redacted], das ähnlich ist zum Rechteck A_1BCD_1.
Die Einteilung in 1, 1, 1, 4 Quadrate setzt sich dann periodisch fort.