Übungszettel 1 Lösungsskizzen

Präsenzübung

a) $1 \times$ $2 \times$ $3 = 1+2$ $4 \times$ $5 = 2+3$

$6 = 1+2+3$ $7 = 3+4$ $8 \times$ $9 = 4+5 = 2+3+4$

$10 = 1+2+3+4$ $11 = 5+6$ $12 = 3+4+5$ $13 = 6+7$

$14 = 2+3+4+5$ $15 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5 = 7+8$ $16 \times$

$17 = 8+9$ $18 = 5+6+7 = 3+4+5+6$ $19 = 9+10$

$20 = 2+3+4+5+6$

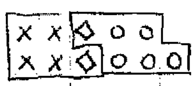
b) Alle ungeraden Zahlen

x x o o
x x o o o

gerade + ungerade = ungerade

$$\begin{array}{ccccc} 4 & + & 5 & = & 9 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 5 & + & 6 & = & 11 \end{array}$$

Erhöht man beide um 1, kommen insgesamt 2 dazu → nächste ungerade Zahl



$$n + (n+1) = 2n+1 = m$$

$$\Rightarrow n = \frac{m-1}{2}$$

Ist die ungerade Zahl m gegeben, so ist $n = \frac{m-1}{2}$ und $n+1 = \frac{m+1}{2}$ $\Rightarrow n + (n+1) = \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} = \frac{2m}{2} = m$

c) Wir gehen systematisch die Zahl der Summanden durch

2 Zahlen $n + (n+1) = 2n+1$ alle ungeraden Zahlen

3 Zahlen $n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3\cdot(n+1)$, also alle durch 3 teilbaren Zahlen ab 6

4 Zahlen $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n+6 = 4(n+1)+2$, das sind alle Zahlen $\equiv 2 \mod 4$ ab 10

5 Zahlen $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$, das sind alle durch 5 teilbaren Zahlen ab 15

c) Forts.

k Zahlen : $n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+k-1)$

$$= k \cdot n + \sum_{i=1}^{k-1} i = k \cdot n + k \cdot (k-1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= k \cdot \left(n + \frac{k-1}{2}\right)$$

<u>1. Fall</u>

Ist k ungerade, so ist $\frac{k-1}{2} \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

> Ist eine Zahl m durch eine <u>ungerade</u> Zahl k teilbar und ist $m \geq k \cdot \frac{k+1}{2}$, so ist m ~~in~~ als Summe von k aufeinander folgenden Zahlen darstellbar.

<u>2. Fall</u>: k gerade, also ~~W…~~ $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow k \cdot \left(n + \frac{k-1}{2}\right) = k \cdot \left(n + \frac{k}{2}\right) - \frac{k}{2}$$

$$= k\left(n + \frac{k}{2} - 1\right) + \frac{k}{2} \equiv \frac{k}{2} \mod k$$

> Läßt eine Zahl m beim Teilen durch eine <u>gerade</u> Zahl k den Rest $\frac{k}{2}$, ~~so ist~~ und ist $m \geq k \cdot \frac{k+1}{2}$, so ist m als Summe von k aufeinander folgenden Zahlen darstellbar.

d) Ist $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so sucht man in der Teilermenge T_n alle ungeraden Teiler. Dazu kann es eine Trapezzerlegung geben, wenn der Teiler (= Anzahl der Summanden) nicht zu groß ist. Für ~~A~~alle geraden Zahlen g testet man, ob n beim Teilen durch g den Rest $\frac{g}{2}$ lässt.

e) Soll es zu $n \in \mathbb{N}$ keine Trapezzerlegung geben, so (notwendige Bedingung) darf n keine ungeraden (Prim-) Teiler haben $\Rightarrow n = 2^m \quad m \in \mathbb{N}$

Angen.: Es gibt eine gerade Zahl g ~~k~~, so dass 2^m beim Teilen durch g einen Rest von $\frac{g}{2}$ lässt.

Also gilt $\quad 2^m = k \cdot g + \frac{g}{2} \quad , k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 2^{m-1} = k \cdot \frac{g}{2} + \frac{g}{4} \in \mathbb{N}$$

Also muss g durch 4 teilbar sein $\Rightarrow g = 4 \cdot n_1$

$\Rightarrow 2^m = k \cdot 4n_1 + 2n_1 \qquad$ Für $m \geq 2$ gilt

$$2^{m-2} = k \cdot n_1 + \frac{n_1}{2}$$

Damit haben wir einen infiniten Regress für g bezüglich der Teilbarkeit durch 4. $\lightning$

Damit ist bewiesen: Zweierpotenzen sind keine Trapezzahlen.

f) Siehe c. $100 \geq k \cdot \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow 200 \geq k(k+1)$

Also muss $k \leq 13$ sein.

Ungerade Teiler von 100 kleiner gleich 13: nur 5

Also 5 Summanden: $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$

gerade Zahlen, die <u>nicht</u> Teiler von 100 sind:

6: $\quad 100 = 16 \cdot 6 + 4 \qquad$ keine Trapezzerlegung

8: $\quad 100 = 12 \cdot 8 + 4 \qquad$ Trapezzerlegung!

$$100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$$

12: $\quad 100 = 8 \cdot 12 + 4 \qquad$ keine Trapezzerlegung

Damit wurden alle (endlich viele!) Möglichkeiten überprüft. Die gefundenen zwei sind die einzig möglichen.

Hausübungen

Aufg. 1

a) $a_n = n^2$ $\quad a_n = a_{n-1} + 2\underbrace{(n-1)}_{=\sqrt{a_{n-1}}} + 1 = \underline{\underline{a_{n-1} + 2\sqrt{a_{n-1}} + 1}}$ (ohne n)

$\Downarrow$

$a_{n-1} = (n-1)^2$

$\Downarrow$

$\sqrt{a_{n-1}} = (n-1)$

b) $a_n = \frac{n+1}{n}$ $\Rightarrow$ $a_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_{n-1} - 1}}$

$a_1 = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$

$a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

$a_1 = 2$

$a_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\underset{2}{a_1} - 1}} = 1 + \frac{1}{1+1} = 1\frac{1}{2} \; (= \frac{3}{2})$

$a_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\underset{\frac{3}{2}}{a_2} - 1}} = 1 + \frac{1}{1+2} = 1\frac{1}{3} \; (= \frac{4}{3})$

$a_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\underset{\frac{4}{3}}{a_3} - 1}} = 1 + \frac{1}{1+3} = 1\frac{1}{4} \; (= \frac{5}{4})$

2. Lösungsweg siehe S. 6

Aufg. 2

a)

$$x = 2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17 + \ldots + 92 \xrightarrow{+5} 97$$

$$x = 97 + 92 + 87 + 82 + \ldots + 7 + 2 \quad \text{(andersherum geschrieben)}$$

$$2x = \underbrace{99 + 99 + 99 + 99 + \ldots + 99 + 99}_{20 \text{ mal } = [97:5]+1 \text{ mal } = 95:5+1 \text{ mal } = 19+1 \text{ mal}} = 20 \cdot 99$$

<u>also:</u> $2x = 20 \cdot 99 \Rightarrow x = 10 \cdot 99 = \underline{\underline{990}}$

b)

$$x = 5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 95 + 100 - 20 \cdot 3 \leftarrow \text{(überall, d.h. 20mal "+3" dazu)}$$

$$= 5 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 19 + 20)}_{\frac{20(20+1)}{2} = 10 \cdot 21 = 210} - \underbrace{20 \cdot 3}_{60}$$

$$= 5 \cdot 210 - 60 = 1050 - 60 = \underline{\underline{990}}$$

Aufg 3

a) $c \xrightarrow{1} cis \xrightarrow{2} d \xrightarrow{3} dis \xrightarrow{4} e \xrightarrow{5} f \xrightarrow{6} fis \xrightarrow{7} g \xrightarrow{8} gis \xrightarrow{9} a \xrightarrow{10} b \xrightarrow{11} h \xrightarrow{12} c'$

$1 \xrightarrow{\cdot q} 2^{\frac{1}{12}} \xrightarrow{\cdot q} 2^{\frac{2}{12}} \xrightarrow{\cdot q} 2^{\frac{3}{12}} \quad \dots \quad \xrightarrow{\cdot q} 2 = 2^{\frac{12}{12}} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}$ ← 12 mal

$\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$

gesucht: q ?

$\boxed{\text{Lösung: } q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}}$

b) $c \to g$ 7 Schritte $\Rightarrow \underbrace{\sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[12]{2}}_{7 \text{ mal}} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 2^{\frac{7}{12}}$

$\approx 1{,}4983071$

Grundton c: 600 Hz

exakte / reine Stimmung: $600\,\text{Hz} \cdot 1{,}5 = 900\,\text{Hz}$

temperierte Stimmung: $\underbrace{\left(\sqrt[12]{2}\right)^7}_{2^{\frac{7}{12}}} \cdot 600\,\text{Hz} \approx 898{,}98425\,\text{Hz}$

$\Rightarrow$ Unterschied: $900\,\text{Hz} - 898{,}98425\,\text{Hz} = 1{,}0157539\,\text{Hz}$

Werden beide Töne zusammen gespielt, kommt es zu einer Schwebung, die deutlich zu hören ist

Aufg 4

a) $a_1 = 1 + 1 + 41 = 43$ $\qquad a_2 = 4 + 2 + 41 = 47$

$a_3 = 9 + 3 + 41 = 53$ $\qquad a_4 = 16 + 4 + 41 = 61$

$a_5 = 25 + 5 + 41 = 71$ $\qquad a_6 = 36 + 6 + 41 = 83$

$a_7 = 49 + 7 + 41 = 97$ $\qquad a_8 = 64 + 8 + 41 = 113$

$a_9 = 81 + 9 + 41 = 131$ $\qquad a_{10} = 100 + 10 + 41 = 151$

alle zehn Zahlen sind Primzahlen

b) $a_{40} = 1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$

$a_{41} = 1681 + 41 + 41 = 1763 = 41 \cdot 43$

c) $a_n = b n^2 + c n + d$

Es sei t Teiler von d, $t > 1$. Also $d = k \cdot t$, $k \in \mathbb{N}$

(Das ist zumindest d selbst)

Für $n = t$ ist $a_t = b t^2 + c t + k t$

$$= t \underbrace{(b t^2 + c + k)}_{>1}$$

Folglich ist t ein echter Teiler von a_t und damit ist a_t <u>keine</u> Primzahl.

---

2. Lösungsweg zu Aufg. 1b

prinzipieller Lösungsweg explizite, geschlossene Form $\to$ eine rekursive Form

1. Schritt: Gleichung für a_n: $a_n = \frac{n+1}{n}$

2. Schritt: Gleichung für a_{n-1}: $a_{n-1} = \frac{n}{n-1}$

3. Schritt: Gleichung für a_{n-1} nach n auflösen

$$a_{n-1} = \frac{n}{n-1} \Rightarrow n \cdot a_{n-1} - a_{n-1} = n \Rightarrow n(a_{n-1} - 1) = a_{n-1}$$

$$\Rightarrow n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} - 1}$$

4. Schritt: Letzte Gleichung in Gleichung für a_n einsetzen

$$a_n = \frac{\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1} + 1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}} = \frac{a_{n-1} + (a_{n-1} - 1)}{a_{n-1}} = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$\underline{\underline{a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}}}$$