Formelsammlung zur Vorlesung

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik WiSe 07/08

Bei allen Formeln muss man genau darauf achten, ob die Folge oder Reihe bei a_0 oder bei a_1 beginnt. Beides ist üblich. Hier beginnen die Reihen stets bei a_1.

arithmetische Folge

rekursiv: $a_n = a_{n-1} + d$ und Startwert a_0 oder a_1

explizit: $a_n = a_0 + n \cdot d = a_1 + (n-1)d$

arithmetische Reihe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$$

geometrische Folge

rekursiv: $a_n = a_{n-1} \cdot q$ und Startwert a_0 oder a_1

explizit: $a_n = a_0 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{n-1}$

geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

unendliche geometrische Reihe
für $|q| < 1$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \frac{1}{1-q}$$

Pascalsches Dreieck

rekursive Definition

$c(n,k) = c(n-1,k-1) + c(n-1,k)$

Randwerte $c(n,0) = c(n,n) = 1$

explizite Definition

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

mit der speziellen Definition $0! = 1$

Binomischer Lehrsatz

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Goldener Schnitt

positive Lösung der Gleichung $\dfrac{\text{Major}}{\text{Gesamtstrecke}} = \dfrac{\text{Minor}}{\text{Major}}$

Mit Gesamtstrecke =1 und Major = x ergibt sich die Gleichung $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1-x}{x}$ und die positive

Lösung $x = \varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Fibonacci-Zahlen

rekursive Definition

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Startwerte $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$

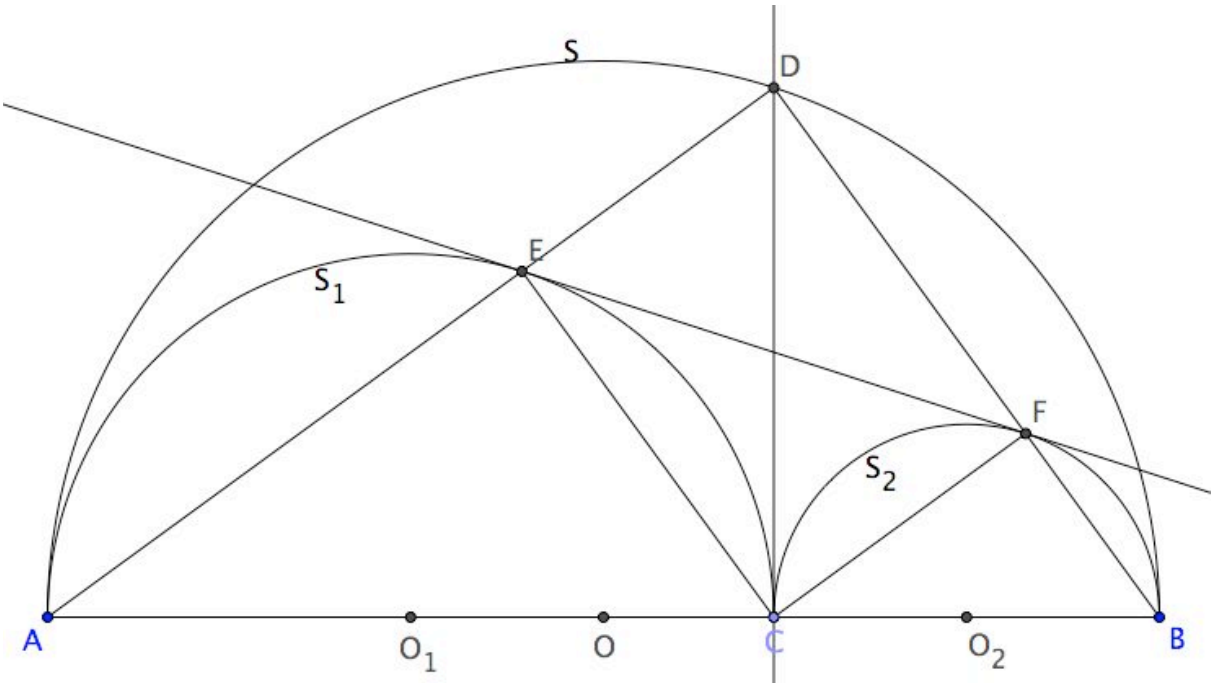
explizite Definition (Formel von Binet)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$\Phi_1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $\Phi_2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ sind die

Lösungen der Gleichung $x^2 = 1 + x$

Das Schustermesser



Mit den Radien $|O_1A| = a$ und $|O_2B| = b$ erhält man für das rechtwinklige Dreieck ABD:

$|AB| = 2a + 2b \quad |CD| = 2\sqrt{ab} \quad |AD| = 2\sqrt{a^2 + ab} \quad |BD| = 2\sqrt{b^2 + ab}$

Das Viereck ECFD ist ein Rechteck und die Gerade EF ist gemeinsame Tangente für die Kreisbögen S_1 und S_2.

Eulersche Polyederformel

In einem Körper, der durch Polygone begrenzt ist, gilt für die Anzahl E der Ecken, F der Flächen und K der Kanten $E + F = K + 2$