Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen
Dr. Reimund Albers

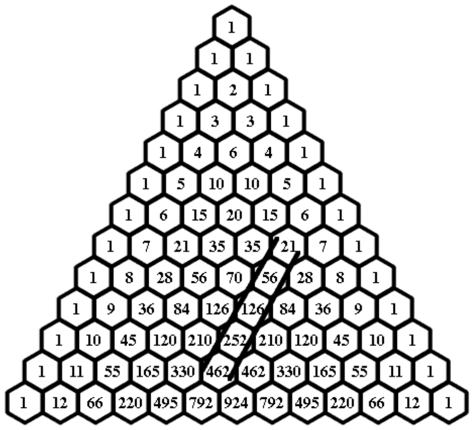
Wintersemester 2007/08

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

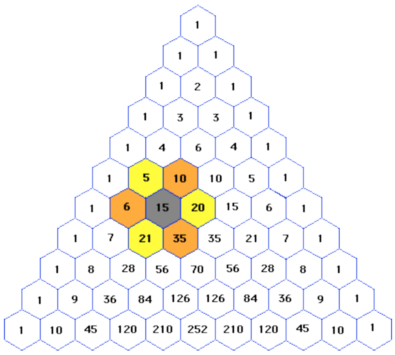
7. Übung: Pascalsches Dreieck **Abgabe:** Mi 19.12. /Do 20.12.

Präsenzübungen für Mittwoch, 12.12. / Donnerstag, 13.12.

1. Verallgemeinerung der Hockeyschlägerregel
   Wie berechnet man die Summe der Zahlen in einem „Stil“, der nicht oben rechts oder links bei 1 beginnt? Siehe Bild die markierten Zahlen von 21 bis 462.
   Schreiben Sie diese Regel allgemein auf.



2. Aus dem Internet

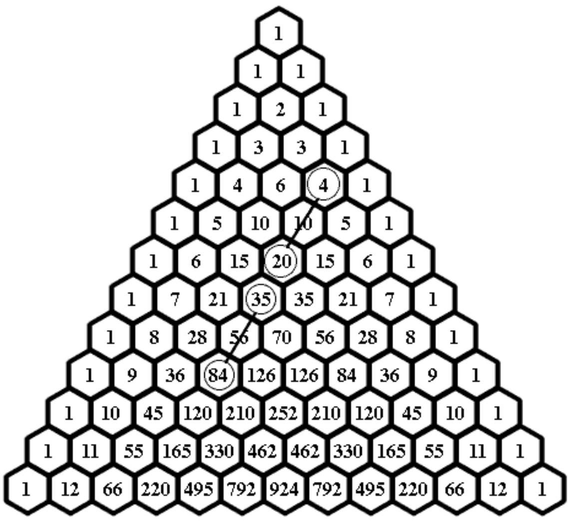


   Notice that the gray cell is surrounded by 6 other cells. These six cells make up the petals* on Pascal's flower. Starting with the petal above and to the left of the gray center, alternating petals are colored yellow and numbered 5, 20, and 21. The three remaining petals around the chosen center are colored orange and numbered 6, 10, and 35.
   The product of the numbers in the yellow petals is 5 x 20 x 21 = 2100.
   The product of the numbers in the orange petals is 6 x 10 x 35 = 2100.
   The products are the same. Can you explain this?
   Testen Sie auch eine andere „Pascal-Blume“.

---
* *petal heißt offensichtlich „Blütenblatt“*

Hausübungen, Abgabe siehe oben

1. Quadratzahlen im Pascalschen Dreieck
   Man findet die Quadratzahlen in der „4. Spalte“. Hier muss man von jeder Zahl die vorvorhergehende abziehen. In der Zeichnung finden Sie in der Markierung $20 - 4 = 16 = 4^2$ und $84 - 35 = 49 = 7^2$.
   a. Beweisen Sie das allgemein.
   b. In welchen Zeilen stehen die beiden Zahlen (in der „4. Spalte“), deren Differenz $25^2 = 625$ ergibt?



2. Addiert man die Zahlen einer Zeile im Pascalschen Dreieck, so erhält man eine Zweierpotenz. Beweisen Sie dieses mit vollständiger Induktion. Verwenden Sie nicht den binomischen Lehrsatz, sondern die Tatsache, dass die Zahlen in einer Zeile, paarweise addiert, die Zahlen der darunter liegenden Reihe erzeugen.

3. Addiert man die Zahlen einer Zeile des Pascalschen Dreiecks mit alternierendem Vorzeichen, so erhält man 0. Beispiel „6.Zeile“: $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$
   Hinweis: Binomischer Lehrsatz

4. Ist im Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ n eine Primzahl p, so ist für alle $k \in \{2, 3, ..., p-1\}$ der Binomialkoeffizient durch p teilbar.
   a. Erläutern Sie die Aussage an einem konkreten Beispiel.
   b. Begründen Sie die Aussage möglichst formal und allgemein.

5. Wiederholung
   $0,\overline{1}_3$ Der Querstrich ist die bekannte Periode. Rechnen Sie diese Zahl in das Zehnersystem um.