

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

Blatt 12

Aus zwei mach drei! Wir wollen hier einige Schritte der Vorlesung auf den Fall von drei Ergebnisse übertragen.

Harry Potter besitzt magische Münzen, die nach dem Werfen drei (!! magisch, magisch) Seiten zeigen können, Kopf (K), Zahl (Z) oder Wappen (W).

1. Überlegen Sie, wie man rekursiv für den Fall 3x Kopf, 2x Zahl, 4x Wappen die Anzahl der Kombinationen herleiten kann, wenn man alle Kombinationszahlen für den Wurf von 8 Münzen bereits kennt.
2. Wir bezeichnen die Anzahl der Kombinationen von k Mal Kopf, z Mal Zahl und w Mal Wappen mit $a(k, z, w)$. Welche Rekursionsgleichung gilt nach den konkreten Überlegungen aus 1. offensichtlich für $a(k, z, w)$?
3. Welche Startwerte und „Randbeziehungen“ müssen Sie definieren/bestimmen, damit die Zahlen $a(k, z, w)$ eindeutig festgelegt sind? Berechnen Sie aus diesen Festlegungen und der allgemeinen Rekursion nach 2. alle Kombinationsanzahlen beim Werfen mit 2 und 3 magischen Münzen.
4. Erläutern Sie mit Bezug auf die allgemeine Permutationsformel, warum $a(k, z, w) = \frac{(k+z+w)!}{k!z!w!}$ gilt.

5. Zeigen Sie mit der Formel aus 4., dass gilt:
 $a(k, z, w) = a(k-1, z, w) + a(k, z-1, w) + a(k, z, w-1)$

6.

simplify((a+b+c)^4)

$$12abc^2 + 12ab^2c + 4ab^3 + 4ac^3 + 4bc^3 + 12a^2bc + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 +$$

Mit einem Computer-Algebra-System hat man $(a+b+c)^4$ ausmultipliziert. Leider ist das Papier nicht breit genug, das gesamte Ergebnis darzustellen. Schreiben Sie es vollständig auf.

7. Im Fall des normalen Münzwurfes konnten wir alle Zahlen systematisch im Pascalschen Dreieck aufschreiben. Wie sähe das entsprechende Gebilde im Fall der drei Ergebnismöglichkeiten aus? Beschreiben Sie es knapp, ggfs. mit einer Skizze. Beschreiben Sie insbesondere, wie der Rand dieses Zahlensystems aussieht.