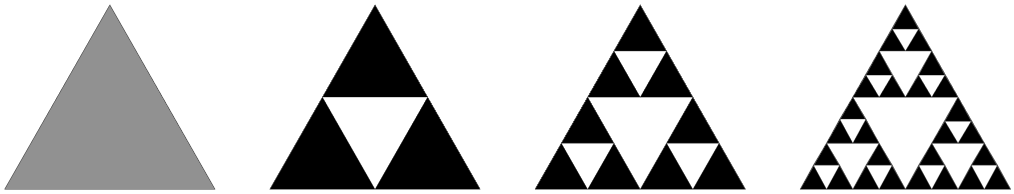
WiSe05/06 11. Januar 2006

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik
Blatt 11

1. Berechnungen am Sierpinski-Dreieck

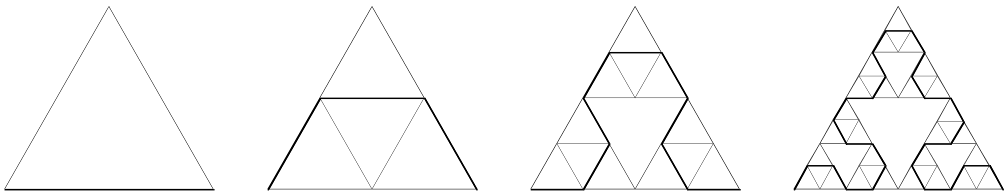
   a. Flächeninhalt



Stufe 0 Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

Wir normieren die Fläche der Stufe 0 zu 1. Wie groß ist dann die Fläche der 1., 2., und 3. Stufe? Berechnen Sie dazu jeweils die Anzahl der Teildreiecke, den Flächeninhalt eines Teildreiecks und dann die Gesamtfläche.
Verallgemeinern Sie auf die n-te Stufe und bilden Sie für die Fläche den Grenzwert für $n \to \infty$.

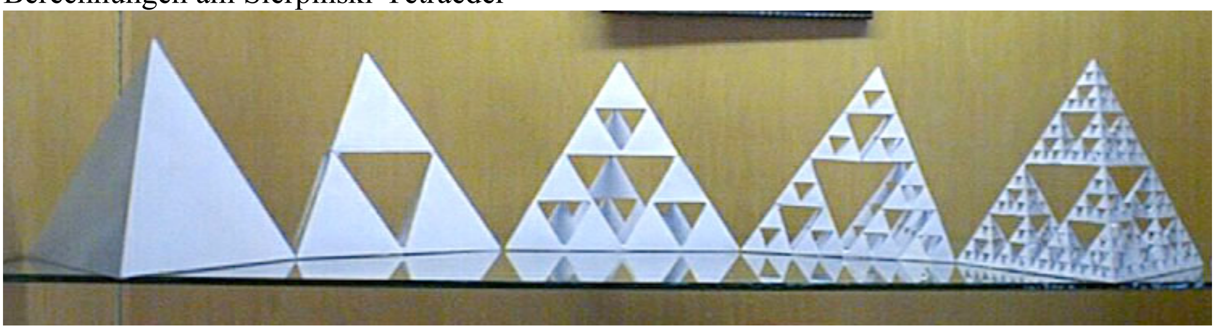
   b. Kurvenlänge



Stufe 0 Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

Wir normieren die Länge einer Kante der Stufe 0 zu 1. Wie groß ist dann die Länge der Kurve der 1., 2., und 3. Stufe? Berechnen Sie dazu jeweils die Anzahl der Teilstrecken, die Länge einer Teilstrecke und dann die Gesamtlänge.
Verallgemeinern Sie auf die n-te Stufe und bilden Sie für die Kurvenlänge den Grenzwert für $n \to \infty$.

2. Berechnungen am Sierpinski-Tetraeder



(Foto: Gayla Chandler)

   a. Volumen

Wir normieren das Volumen des ganz linken Tetraeders (Stufe 0) zu 1. Wie groß ist dann das Volumen der 1., 2., 3. und 4. Stufe? Berechnen Sie dazu jeweils die Anzahl der Teiltetraeder, das Volumen eines Teiltetraeders und dann das Gesamtvolumen.

Verallgemeinern Sie auf die n-te Stufe und bilden Sie für das Volumen den Grenzwert für $n \to \infty$.

b. Oberfläche
Wir normieren die Fläche eines Dreiecks des ganz linken Tetraeders (Stufe 0) zu 1. Wie groß ist dann die Oberfläche der 1., 2., 3. und 4. Stufe? Berechnen Sie dazu jeweils die Anzahl der Teiltetraeder (siehe a), die Oberfläche eines Teiltetraeders und dann die Gesamtoberfläche.
Verallgemeinern Sie auf die n-te Stufe und bilden Sie für die Fläche den Grenzwert für $n \to \infty$.

c. Kantenlängen
Wir normieren die Kantenlänge des ganz linken Tetraeders (Stufe 0) zu 1. Dann ist die Gesamtkantenlänge der Stufe 0 gleich 6, denn der Tetraeder hat 6 Kanten. Stellen Sie sich den Tetraeder aus Draht gebaut vor.
Wie groß ist dann die Kantenlänge der 1., 2., 3. und 4. Stufe? Berechnen Sie dazu jeweils die Anzahl der Teiltetraeder (siehe a), die Kantenlänge eines Teiltetraeders und dann die Gesamtkantenlänge.
Verallgemeinern Sie auf die n-te Stufe und bilden Sie für die Kantenlänge den Grenzwert für $n \to \infty$.

3. (Zum Satz von Kummer)

a. Erforschen Sie die Anzahl des Primfaktors 2 in n!. Setzen Sie dazu die angefangene Tabelle genügend weit fort.

n	**Binärdarst von n**	**Primfaktorzerlegung von n!**	**Anzahl des Faktors 2**
2	10	2	1
3	11	$2 \cdot 3$	1
4	100	$2^3 \cdot 3$	3
5	101	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	3

b. Beschreiben Sie, wann die Anzahl des Faktors 2 um 1, 2, 3, ... wächst. Wie zeigt sich das an der Binärdarstellung?

c. Erforschen Sie reine Zweierpotenzen. Wie viele Zweien hat die Primfaktorzerlegung von (2^k)! ?

d. Geben Sie nun einen Algorithmus an, mit dem man die Anzahl des Faktors 2 in der Primfaktorzerlegung von n! berechnen kann. Testen Sie ihn an 38!, das 35 Zweien in der Primfaktorzerlegung hat, und 46! mit 42 Zweien in der Primfaktorzerlegung. (Ein allgemeiner Beweis ist nicht gefordert)

e. Berechnen Sie mit dem Satz von Kummer, ob der Binomialkoeffizient $\binom{62}{18}$ durch 2 teilbar ist oder nicht.

f. Schreiben Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{62}{18}$ über die Definition mit Fakultäten und berechnen Sie für die Fakultäten die Anzahl der Zweien in der Primfaktorzerlegung (siehe d). Können Sie das Ergebnis nach dem Satz von Kummer über die Teilbarkeit durch 2 bestätigen?