

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

2. Übung Papierfalten und Folgen und Reihen

Abgabe: Do, 27.10.05

1. Aufgabe

Berechnen Sie das Symbol in der Papierfaltungsfolge an den Positionen

- a) 1563 b) 1792 c)
- $2^{438} - 1$

2. Aufgabe

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die Periode p , wenn gilt:Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+p} = a_n$

- Erläutern Sie diese Definition mit eigenen Worten und einem erklärenden Beispiel.
- Beweisen Sie, dass die Papierfaltungsfolge nicht periodisch ist.
Hinweis: Betrachten Sie für allgemeines $p \in \mathbb{N}$ das Symbol auf Position p und Position $3p$ und weisen Sie nach, dass auf diesen beiden Positionen nie dasselbe Symbol stehen kann.

3. Aufgabe

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $a_0 = 0$. Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und vermuten Sie so eine explizite Gleichung für a_n . Ein Beweis ist nicht gefordert.

4. Aufgabe

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge, also $a_n = a_0 + n \cdot d$. Sie kennen $a_8 = 17$ und $a_{40} = 65$.

- Berechnen Sie a_{24} , indem Sie zunächst a_0 und d berechnen.
- Ein Schüler berechnet $a_{24} = \frac{17 + 65}{2} = 41$ mit der Begründung $24 = \frac{8 + 40}{2}$. Welche allgemeine Gesetzmäßigkeit verwendet er? Erläutern Sie das am Beispiel a_2 , a_{10} und a_6 .
- Formulieren Sie die Gesetzmäßigkeit aus b) ganz allgemein für eine arithmetische Folge und beweisen Sie diese.
- In Fortführung dieses Gedankens könnte man auf die Idee kommen, folgendermaßen zu rechnen:

$$a_{12} = \frac{17 + 65}{4} = 20,5 \text{ mit der Begründung } 12 = \frac{8 + 40}{4}. \text{ Diese Rechnung ist falsch!}$$

Welche Verallgemeinerung der in c) bewiesenen Gesetzmäßigkeit ist also nicht zulässig? Begründen Sie dieses.