

## Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

## 2. Übung Papierfalten und Folgen und Reihen

Abgabe: Do, 27.10.05

## 1. Aufgabe

Berechnen Sie das Symbol in der Papierfaltungsfolge an den Positionen

- a) 1563    b) 1792    c)
- $2^{438} - 1$

## 2. Aufgabe

Definition: Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat die Periode  $p$ , wenn gilt:Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $a_{n+p} = a_n$ 

- Erläutern Sie diese Definition mit eigenen Worten und einem erklärenden Beispiel.
- Beweisen Sie, dass die Papierfaltungsfolge nicht periodisch ist.  
Hinweis: Betrachten Sie für allgemeines  $p \in \mathbb{N}$  das Symbol auf Position  $p$  und Position  $3p$  und weisen Sie nach, dass auf diesen beiden Positionen nie dasselbe Symbol stehen kann.

## 3. Aufgabe

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist rekursiv definiert durch  $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ,  $a_0 = 0$ . Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und vermuten Sie so eine explizite Gleichung für  $a_n$ . Ein Beweis ist nicht gefordert.

## 4. Aufgabe

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine arithmetische Folge, also  $a_n = a_0 + n \cdot d$ . Sie kennen  $a_8 = 17$  und  $a_{40} = 65$ .

- Berechnen Sie  $a_{24}$ , indem Sie zunächst  $a_0$  und  $d$  berechnen.
- Ein Schüler berechnet  $a_{24} = \frac{17 + 65}{2} = 41$  mit der Begründung  $24 = \frac{8 + 40}{2}$ . Welche allgemeine Gesetzmäßigkeit verwendet er? Erläutern Sie das am Beispiel  $a_2$ ,  $a_{10}$  und  $a_6$ .
- Formulieren Sie die Gesetzmäßigkeit aus b) ganz allgemein für eine arithmetische Folge und beweisen Sie diese.
- In Fortführung dieses Gedankens könnte man auf die Idee kommen, folgendermaßen zu rechnen:

$$a_{12} = \frac{17 + 65}{4} = 20,5 \text{ mit der Begründung } 12 = \frac{8 + 40}{4}. \text{ Diese Rechnung ist falsch!}$$

Welche Verallgemeinerung der in c) bewiesenen Gesetzmäßigkeit ist also nicht zulässig? Begründen Sie dieses.