2. METHODE NACH ARCHIMEDES

„Dem Rechner gleich, der seine Kräfte sammelt, um einen Kreis zu messen, und's nicht findet, und auf den Lehrsatz sinnt, der nötig wäre,... "[10]

Dante Alighieri

Archimedes von Syrakus

Mit dem seinerzeit größten griechischen Mathematiker Archimedes von Syrakus (s. Bild[11]) begannen erstmals 250 v. Chr. theoretische Berechnungen zur Annäherung an den Umfang eines Kreises. Die Basis seiner erfolgreichen Approximation geht von der Tatsache aus, dass π bei einem Durchmesser von 1 gleich U ist wegen $\pi = \frac{U}{d}$. Diesem Kreis beschrieb er jeweils ein Sechseck ein, das offenbar einen geringeren Umfang als der Kreis hatte, und ein Sechseck um, das sicher größer als π war. So hatte er jeweils eine untere und eine obere Schranke für den Umfang des Kreises festgelegt. Verdoppelt man die Anzahl der Ecken in den ein- und umbeschriebenen Polygonen, so nähern sich die Umfänge der Vielecke von beiden Seiten immer mehr dem Kreisumfang an, so dass gilt:

$$\lim_{n \to \infty} U_{n-Eck} = U_{Kreis} = \pi$$

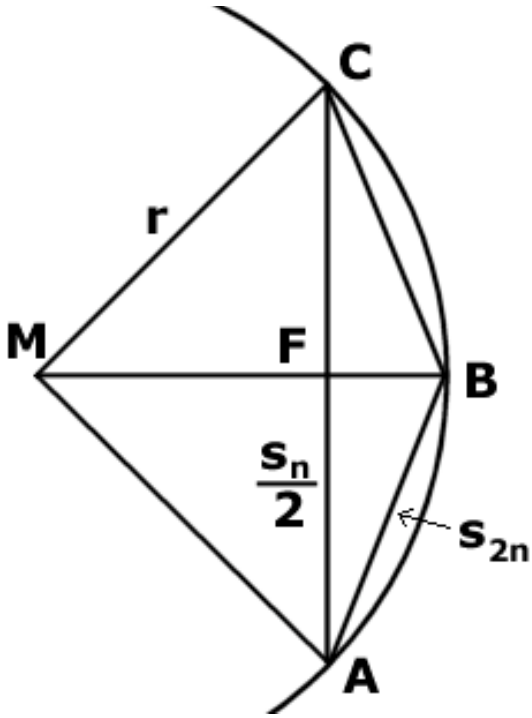
Indem man also n beliebig groß wählt, reduziert sich die Abweichung vom tatsächlichen Kreisumfang in jedem Schritt. Da Archimedes weder die Dezimalschreibweise noch die Hilfe mittels der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktionen zur Verfügung standen, musste er eine zeitaufwändige geometrische Konstruktion anwenden. Dennoch war seine Methode fast 2000 Jahre lang die erfolgreichste der π-Berechnung und wurde bis ins 17. Jahrhundert von mehreren Mathematikern wieder aufgegriffen.

Zur vereinfachten Rechnung wird im Folgenden der Radius r mit 1 festgelegt, sodass

$$\pi = \frac{U}{2} \quad \text{bzw.} \quad 2\pi = U \quad \text{gilt.}$$

[10] Arndt, Jörg & Christoph Haenel, S. 154
[11] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes.html

Nebenstehende Skizze veranschaulicht die Vorgehensweise des Archimedes bei der Einbeschreibung eines Polygons in einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r = 1. $\overline{AC} = s_n$ ist die Seite eines regelmäßigen Sechsecks. Bei der Verdopplung zum Zwölfeck werden die dadurch entstandenen Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... mit s_{2n} bezeichnet. Im Weiteren wird schrittweise die Beziehung zwischen s_n und s_{2n} hergeleitet.



aus: www.facharbeit.de (Facharbeit von Markus Müller)

Da $\overline{MA} = r = 1$ ist, folgt aus dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AF}^2 + \overline{MF}^2 = 1$$

$$\overline{MF}^2 = 1 - \overline{AF}^2 \qquad (2.1)$$

Für $\overline{AF} = \frac{s_n}{2}$ ergibt sich:

$$\overline{MF} = \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

$$\overline{MF} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2} \qquad (2.2)$$

Außerdem ist nach Pythagoras:

$$\overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\overline{FB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AF}^2 \qquad (2.3)$$

Mit $\overline{AB} = s_{2n}$ ergibt sich:

$$\overline{FB} = \sqrt{s_{2n}^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

$$\overline{FB} = \frac{1}{2}\sqrt{4s_{2n}^2 - s_n^2} \qquad (2.4)$$

Nun ist $\overline{MF} + \overline{FB} = 1$ und damit folgt aus den Formeln (2.2) und (2.4):

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4s_{2n}^2 - s_n^2} = 1$$

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4s_{2n}^2 - s_n^2} \qquad (2.5)$$

Quadriert ergeben beide Seiten:

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2} + \frac{1}{4}\left(4 - s_n^2\right) = \frac{1}{4}\left(4s_{2n}^2 - s_n^2\right)$$

$$1 - \sqrt{4 - s_n^2} + 1 - \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 - \frac{s_n^2}{4} \qquad (2.6)$$

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$$

$$\boxed{s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}} \qquad (2.7)[12]$$

Für den Umfang multipliziert man das errechnete s_{2n} mit 2n:

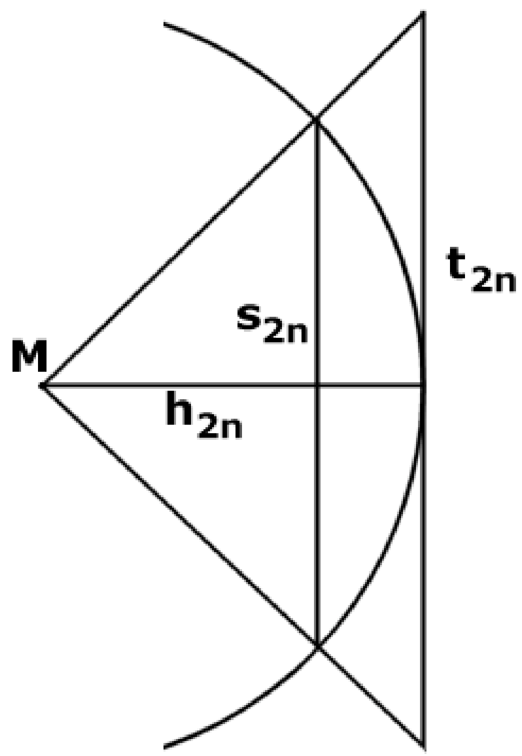
$$\boxed{u_{2n} = 2n \cdot s_{2n}} \qquad (2.8)$$

Analog zur Einbeschreibung funktioniert auch die Umbeschreibung eines Polygons. Wiederum ermöglichen die Formeln den Übergang vom n-Eck zum 2n-Eck, auf den wegen der Ähnlichkeit beider Verfahren nur kurz eingegangen werden soll. Die nebenstehende Skizze wird nun durch die umbeschreibende Seite t_{2n} ergänzt, der Radius ist weiterhin mit r = 1 festgelegt.

Das Seitenverhältnis

$$\frac{t_{2n}}{s_{2n}} = \frac{1}{h_{2n}} \qquad (2.9)$$

folgt aus dem Strahlensatz. Aufgelöst ergibt sich für t_{2n}:



aus: www.facharbeit.de (Facharbeit von Markus Müller)

[12] Herleitung und Formeln (2.1)–(2.7) aus: Weimar, Joachim: Die Quadratur des Kreises, S.15-16

$$t_{2n} = \frac{s_{2n}}{h_{2n}} \qquad (2.10)$$

Die unbekannte Seite h_{2n} erhält man aus dem Satz von Pythagoras:

$$h_{2n}^2 = 1 - \left(\frac{s_{2n}}{2}\right)^2$$

$$h_{2n} = \sqrt{\frac{4 - s_{2n}^2}{4}}$$

$$h_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_{2n}^2} \qquad (2.11)$$

Setzt man nun (2.11) in (2.10), ergibt sich für die gesuchte Seite t_{2n}:

$$\boxed{t_{2n} = \frac{2 \cdot s_{2n}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}}} \qquad (2.12)$$

Um den Umfang zu erhalten, erweitert man erneut mit 2n:

$$\boxed{U_{2n} = 2n \cdot t_{2n} = n \cdot \frac{4 \cdot s_{2n}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}}} \qquad (2.13)$$ [13]

Man erkennt, dass der Umfang des umbeschriebenen Polygons nur durch vorausgegangene Berechnung der Seite s_{2n} zu erhalten ist. Dies führte möglicherweise dazu, dass Archimedes Rundungsfehler nicht nur beim Übergang vom $u_{n\text{-Eck}}$ zum $u_{2n\text{-Eck}}$ bzw. vom $U_{n\text{-Eck}}$ zum $U_{2n\text{-Eck}}$ mitnahm, sondern auch beim Übergang vom einbeschriebenen zum umbeschriebenen Polygon.

Bei diesen Methoden ist jeweils ein Startwert erforderlich, der sich beim einbeschriebenen Sechseck mit Radius r = 1 auf den Wert 6 für den Umfang beläuft, beim umbeschriebenen Sechseck beträgt er $4\sqrt{3}$. Daraus ergeben sich für π wegen $\pi = \frac{U}{2}$ die Anfangswerte des Umfangs $u_6 = 3$ für das ein- und $U_6 = 2\sqrt{3}$ für das umbeschriebene 6-Eck. Mit zunehmender Eckenzahl (n = 12, 24, 48, ...) ergibt sich durch die oben beschriebene Formel ein immer genauerer Wert für π. Da dieser Vorgang unendlich oft wiederholt werden kann, kann auch π beliebig approximiert werden. Bereits beim 96-Eck erhält man einen in praktischer Anwendung befindlichen Wert für π. Das Verfahren

[13] Formeln (2.9)–(2.13) aus: www.facharbeit.de (Facharbeit von Markus Müller)

ist zwar einfach, aber dafür ist das Wurzelziehen notwendig, was zu Archimedes' Zeiten auf schriftlichem Weg noch sehr mühsam war. Der Wert für π konvergiert überdies nur sehr langsam. Bei jedem Schritt wird nur eine sehr kleine Verbesserung ermöglicht, was eine Berechnung von mehreren Millionen Stellen unmöglich macht. Dennoch war sie bis ins 17. Jahrhundert die gebräuchlichste Methode.

Durchlauf	**Umfang**$_{\text{einbeschrieben}}$	**Umfang**$_{\text{umbeschrieben}}$	**Korrekte Nach-kommastellen**
1	3.00000000000000000	3.46410161513775439	0
2	3.10582854123024887	3.21539030917347235	0
3	3.13262861328123821	3.15965994209750045	1
4	3.13935020304686718	3.14608621513143483	1
5	3.14103195089050979	3.14271459964536826	2
6	3.14145247228546198	3.14187304997982375	3
7	3.14155760791185745	3.14166274705684856	3
8	3.14158389214831812	3.14161017660468955	3
10	3.14159210599927130	3.14159374877135189	5
15	3.14159265305503643	3.14159265465930559	8
16	3.14159265345610361	3.14159265385717079	9
17	3.14159265355637052	3.14159265365663742	9
20	3.14159265358926998	3.14159265359083673	10
25	3.14159265358979134	3.14159265358979367	14
27	3.14159265358979223	3.14159265358979323	14

(aus: http://www.uni-leipzig.de/~sma/pi_einfuehrung/archimedes.html)

Diese Tabelle verdeutlicht die extrem langsame Konvergenz dieser Methode. Erst bei 25 Durchläufen, was einem Polygon von $9{,}47676 \cdot 10^{18}$ Ecken entspricht, erhält man 14 korrekte Nachkommastellen.