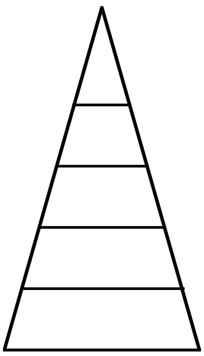
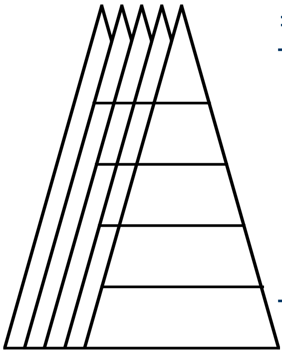
Zahlenfolgen

Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?

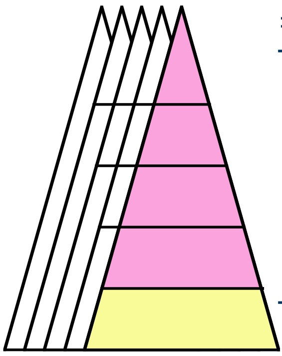


Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?



# Linien	# Dreiecke	# Trapeze
0	1	0
1	2	1
2	3	3
3	4	6
4	5	10
5	6	15

Wieviele Dreiecke, wieviele Trapeze?

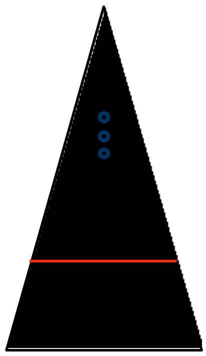


# Linien	# Dreiecke	# Trapeze
0	1	0
1	2	1
2	3	3
3	4	6
4	5	10
5	6	15

1
2

n

n+1



	Dreiecke	Trapeze
n	n+1	a_n
n+1	n+2	$a_{n+1} = a_n + n+1$

Geschlossene und rekursive Formeln

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	0	1	3	6	10	15	...

Die Folge ist definiert durch die rekursive Formel

$$a_n = a_{n-1} + n, \qquad a_0 = 0.$$

Die Formel heißt rekursiv, weil die Definition des Folgegliedes a_n vom vorhergehenden Folgenglied a_{n-1} abhängt.

Geschlossene und rekursive Formeln

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	0	1	4	9	16	25	...

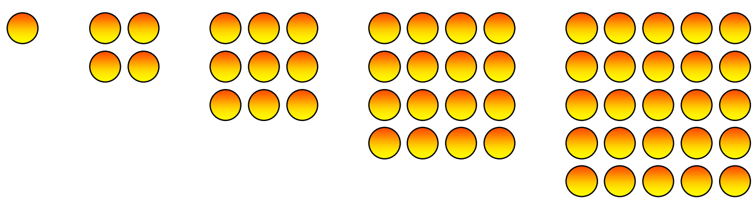
Die Folge der Quadratzahlen ist gegeben durch die geschlossene Formel

$$a_n = n^2.$$

Die Formel für a_n heißt geschlossen, weil sie nur vom Index n abhängt.

Quadratzahlen

n	1	2	3	4	5	6	...
q_n	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	...



Quadratzahlen

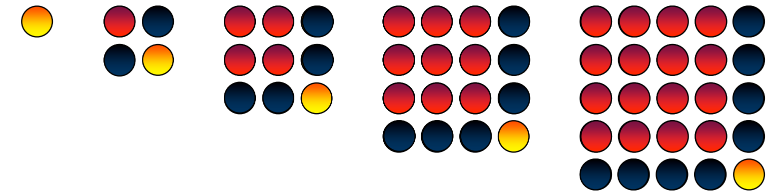
Geschlossene Formel

$q_n = n^2$

Rekursive Formel

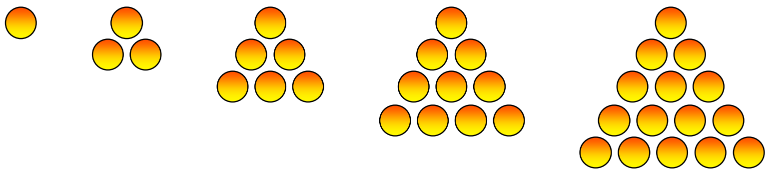
$q_n = q_{n-1} + 2(n-1) + 1$
$q_1 = 1$

n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5



Dreieckszahlen

n	1	2	3	4	5	6	...
d_n	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	...



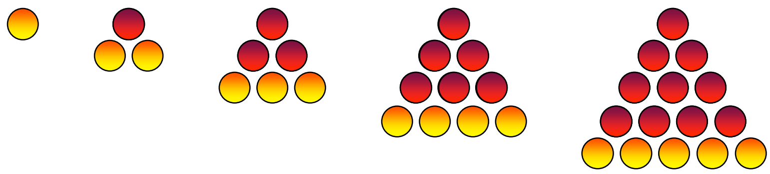
n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

Dreieckszahlen

Rekursive Formel

$d_n = d_{n-1} + n$
$d_1 = 1$

Geschlossene Formel



n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

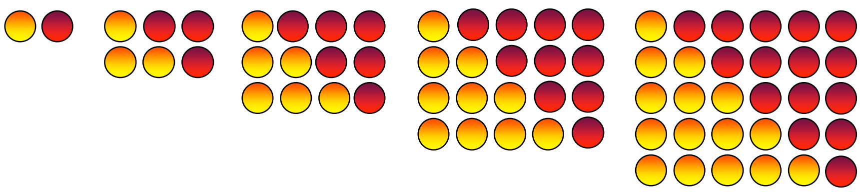
Dreieckszahlen

Rekursive Formel

$$d_n = d_{n-1} + n$$
$$d_1 = 1$$

Geschlossene Formel

$$d_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

Summe der natürlichen Zahlen

Gesucht ist die
100. Dreieckszahl!

1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100

= 5050

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

Summe der natürlichen Zahlen

1	+			100	= **101**
2	+		99		= **101**
3	+	98			= **101**
	⋮				⋮
50	+	51			= **101**

50 * 101 = 5050

$$1+2+3+\ldots+100=\frac{100 \cdot 101}{2}=$$

Dreiecks- und Quadratzahlen

$d_n + d_{n-1} = n^2$

$d_n + d_{n-1} = q_n$

Wenn man zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen addiert, erhält man eine Quadratzahl.

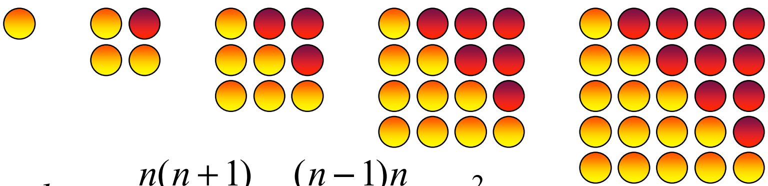
n	0	1	2	3	4	5	...
d_n	0	1	3	6	10	15	...

Dreiecks- und Quadratzahlen

$d_n + d_{n-1} = n^2$

$d_n + d_{n-1} = q_n$

Wenn man zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen addiert, erhält man eine Quadratzahl.



$$d_n + d_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2$$

Die Folge der Nicht-Quadratzahlen

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16...

Gibt es für die Folge aller natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahl sind, eine Formel?

Ist sie geschlossen oder rekursiv?

Arbeitsblatt

$$u_n = n + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor$$

Primzahlen zwischen 1 und 100

2	**3**	**5**	**7**	**11**
13	**17**	**19**	**23**	**29**
31	**37**	**41**	**43**	**47**
53	**59**	**61**	**67**	**71**
73	**79**	**83**	**89**	**97**

Die Folge der Primzahlen

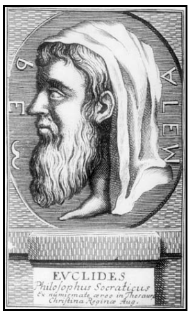
Es gibt unendlich viele Primzahlen, doch eine Formel ist nicht bekannt.

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Betrachte:

$$\mathbf{P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}$$



Euklid von Alexandria
ca. 325-265 v. Chr.

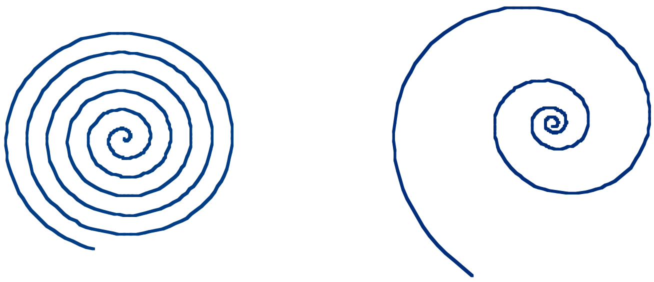
$$\mathbf{P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}$$

Annahme:

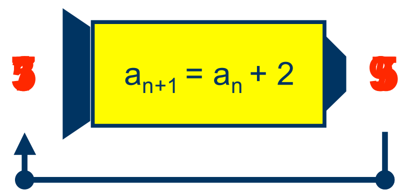
a) P ist eine Primzahl
Dann haben wir einen Widerspruch zur Annahme, dass es nur n Primzahlen gibt.

b) P ist keine Primzahl
Dann muss P durch eine der Zahlen $\mathbf{p_k}$ teilbar sein.
Dann ist aber auch die Differenz $\mathbf{P - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1}$ durch $\mathbf{p_k}$ teilbar.
Damit wäre aber 1 durch $\mathbf{p_k}$ teilbar. Widerspruch!
Also, wenn **P** keine Primzahl ist, muss es eine <u>neue</u> Primzahl geben. Dann haben wir wieder einen Widerspruch zur Annahme, dass es nur n Primzahlen gibt.

Arithmetische und geometrische Prozesse

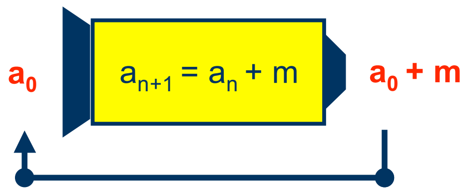


Arithmetische Prozesse

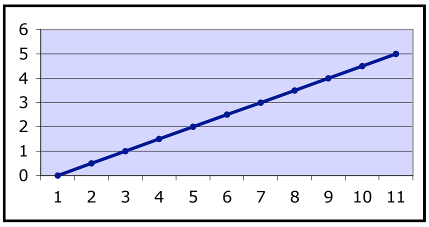


n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**...**

Arithmetische Prozesse



Die Folgenglieder einer arithmetischen Folge liegen auf einer Geraden.



$a_{n+1} - a_n = m$

Die arithmetische Reihe

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	a_0	a_0+d	a_0+2d	a_0+3d	a_0+4d	a_0+5d	...

$$s_n = a_0 + (a_0+d) + (a_0+2d) + \ldots + (a_0+nd)$$
$$s_n = (a_0+nd) + (a_0+(n-1)d) + (a_0+(n-2)d) + \ldots + a_0$$

$$2s_n = (n+1)(a_0+a_n)$$
$$s_n = \frac{(n+1)(a_0+a_n)}{2}$$

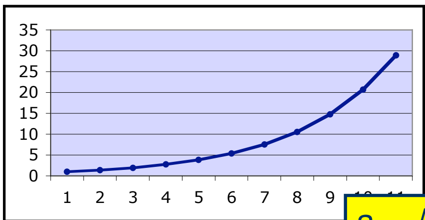
Geometische Prozesse

8 $\quad a_{n+1} = a_n * 2 \quad$ 16

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**...**

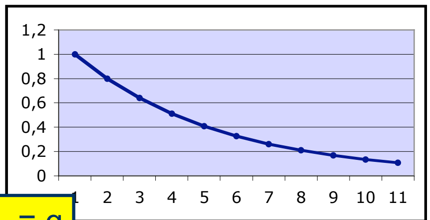
Geometische Prozesse

$a_0 \quad a_{n+1} = a_n * q \quad a_0 * q$



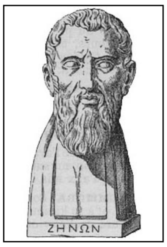
q > 1

$a_{n+1} / a_n = q$

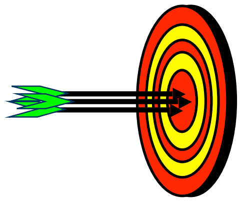


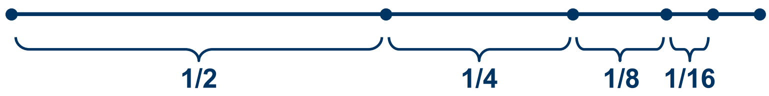
q < 1

Zenon's Paradoxon



Zenon von Elea
495 bis 430 v. Chr.

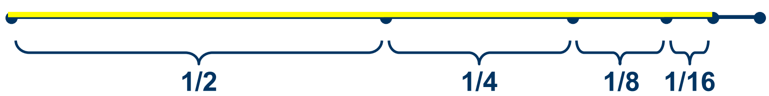




Zenon's Paradoxon

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} &&= \frac{1}{2}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4} &&= \frac{3}{4}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &&= \frac{7}{8}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} &&= \frac{15}{16}
\end{aligned}\right\}$$

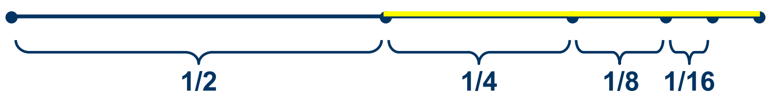
Länge der bereits zurückgelegten Strecke.



Zenon's Paradoxon

Länge der noch verbleibenden Strecke.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$$



Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \dots$$

Lassen sich unendlich viele Potenzen von q aufsummieren?

Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

$$q * s_n = \quad q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$$

$$s_n - q * s_n = 1 \qquad - q^{n+1}$$

$$s_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

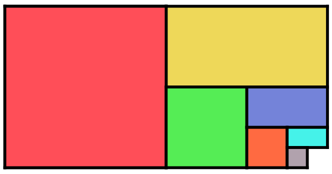
Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad q^{n+1} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{wenn } q<1 \text{ ist,} \\ \infty & \text{wenn } q>1 \text{ ist.} \end{cases}$$

$$s_n \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{wenn } q<1 \text{ ist,} \\ \infty & \text{wenn } q>1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Die geometrische Reihe

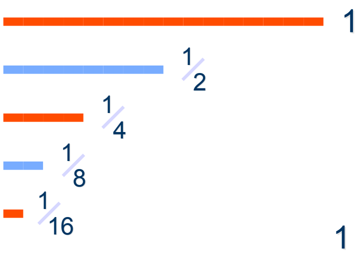


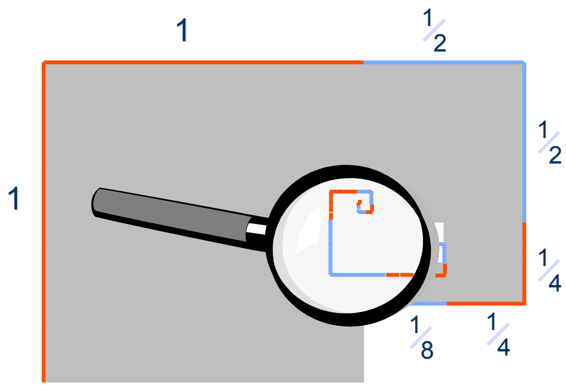
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

$$s_n \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{wenn } q<1 \text{ ist,} \\ \infty & \text{wenn } q>1 \text{ ist.} \end{cases}$$

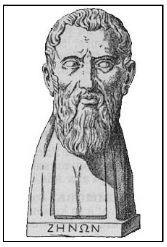
Geometrische Folge

Länge reduziert um
konstanten Faktor



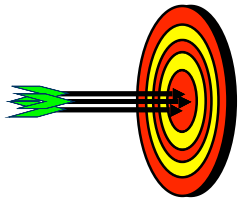


A Polygonal Geometric Spiral

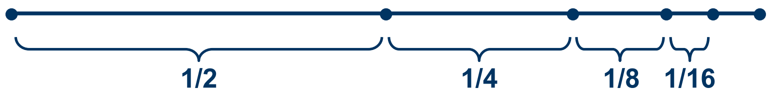


Zenon‘s Paradoxon

Zenon von Elea
495 bis 430 v. Chr.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$



Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

Also: Werden bei der geometrischen Reihe die einzelnen Summanden kleiner, so ergibt die unendliche Reihe einen endlichen Wert.

Verallgemeinerung

Werden die einzelne … rgendwie) kleiner,
so ergibt eine unend… endlichen Wert.

Harmonische Reihe

n	1	2	3	4	5	6	...
a_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Harmonische Reihe

Angenommen, die harmonische Reihe besitzt einen endlichen Wert *S*:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$S_2 = S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

Ganz offensichtlich ist aber $S_2 > S_1$! Widerspruch!

Die harmonische Reihe wird unendlich groß.

Harmonische Reihe

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

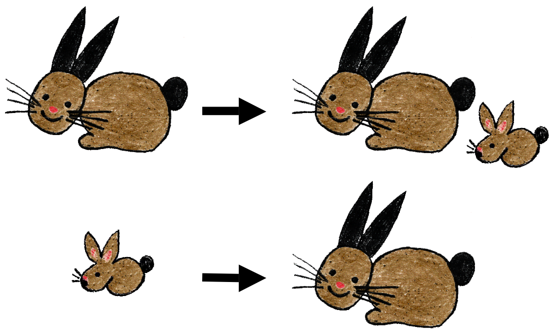
$$S_1 = \frac{1}{2} S = \quad \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{6} \quad + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$S_2 = S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S = \frac{1}{1} \quad + \frac{1}{3} \quad + \frac{1}{5} \quad + \frac{1}{7} + \ldots$$

	S		S1		S2
1	1,0000	2	0,5000	1	1,0000
2	1,5000	4	0,7500	3	1,3333
3	1,8333	6	0,9167	5	1,5333
4	2,0833	8	1,0417	7	1,6762
5	2,2833	10	1,1417	9	1,7873
6	2,4500	12	1,2250	11	1,8782
7	2,5929	14	1,2964	13	1,9551
8	2,7179	16	1,3589	15	2,0218
9	2,8290	18	1,4145	17	2,0806
10	2,9290	20	1,4645	19	2,1333

Fibonacci-Zahlen

Leonardo von Pisa
ca. 1170 bis 1250



Fibonacci-Zahlen

Leonardo von Pisa
ca. 1170 bis 1250

a → a b
b → a

Fibonacci-Zahlen

n	
0	b
1	a
2	a b
3	a b a
4	a b a a b
5	a b a a b a b a
6	a b a a b a b a a b a a b
7	a b a a b a b a a b a a b a b a a b a b a

a → a b
b → a

Fibonacci-Zahlen

n		F_n
0	b	**1**
1	a	**1**
2	ab	**2**
3	aba	**3**
4	abaab	**5**
5	abaababa	**8**
6	abaababaabaab	**13**
7	abaababaabaababaababa	**21**

Fibonacci-Zahlen

n		F_n
0	b	**1**
1	a	**1**
2	ab	**2**
3	aba	**3**
4	abaab	**5**
5	abaababa	**8**
6	abaababaabaab	**13**
7	abaababaabaababaababa	**21**

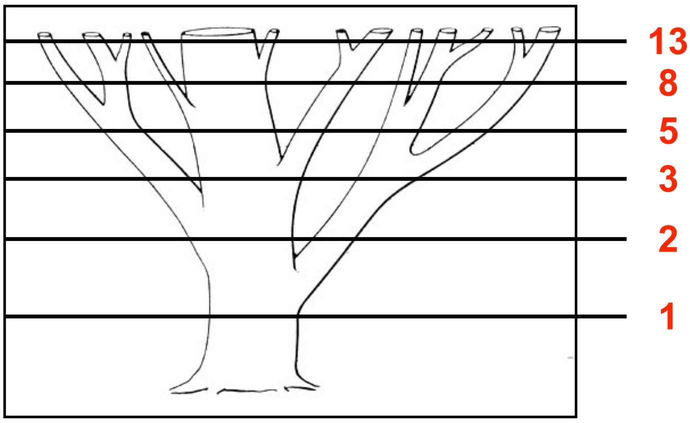
Fibonacci-Zahlen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

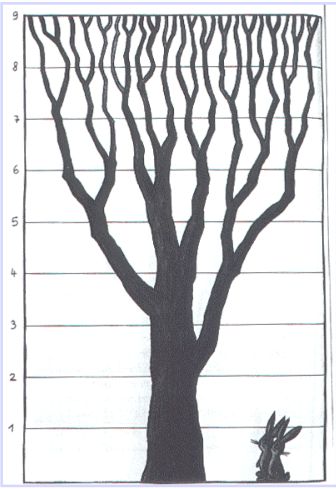
$w_{n+1} = w_n \& w_{n-1}$	$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
$w_0 = b$	$F_0 = 1$
$w_1 = a$	$F_1 = 1$

Es gibt eine formale Analogie zwischen den Wörtern und den Fibonacci-Zahlen.

Fibonacci-Baum

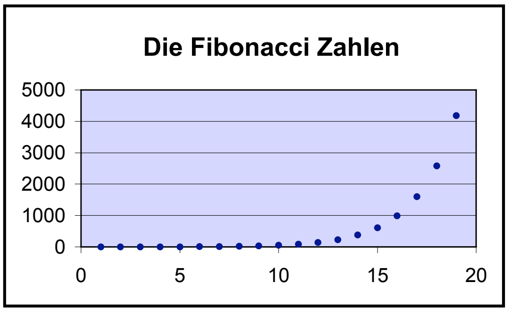


Fibonacci-Baum



Fibonacci-Zahlen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...



Wachstumskoeffizienten

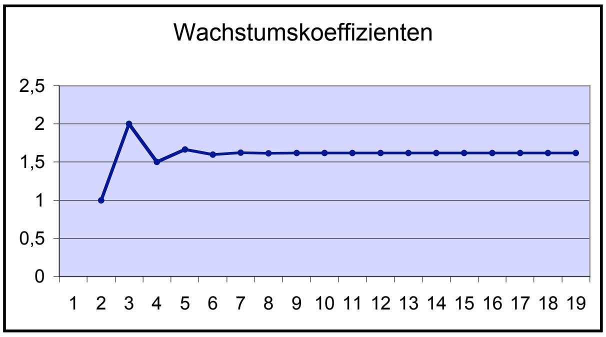
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$

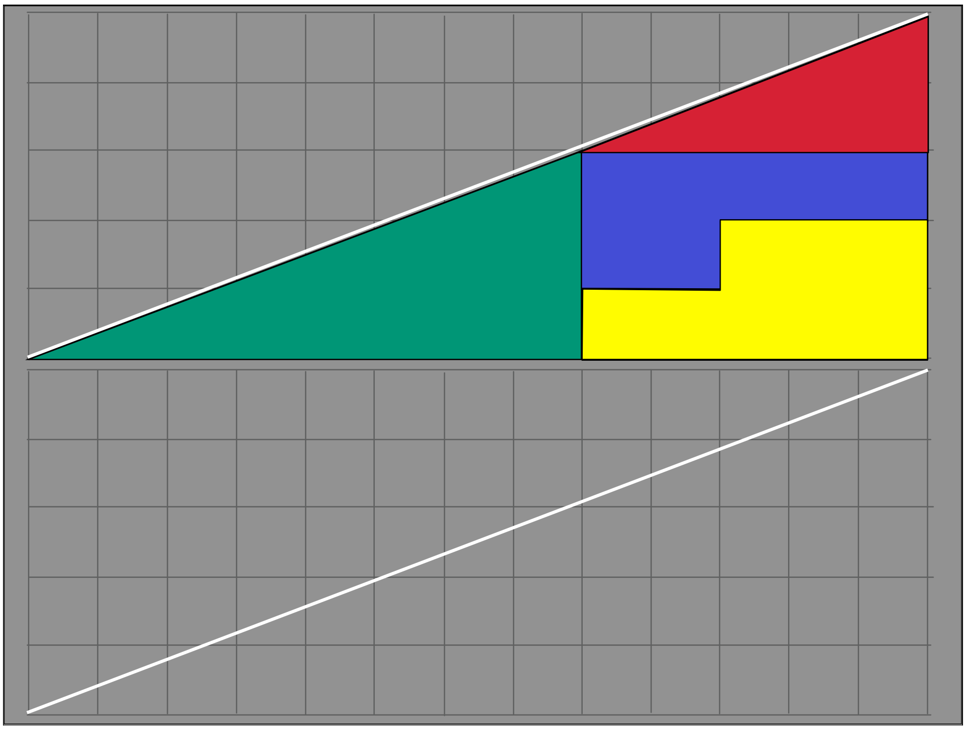
$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61833\ldots}$$

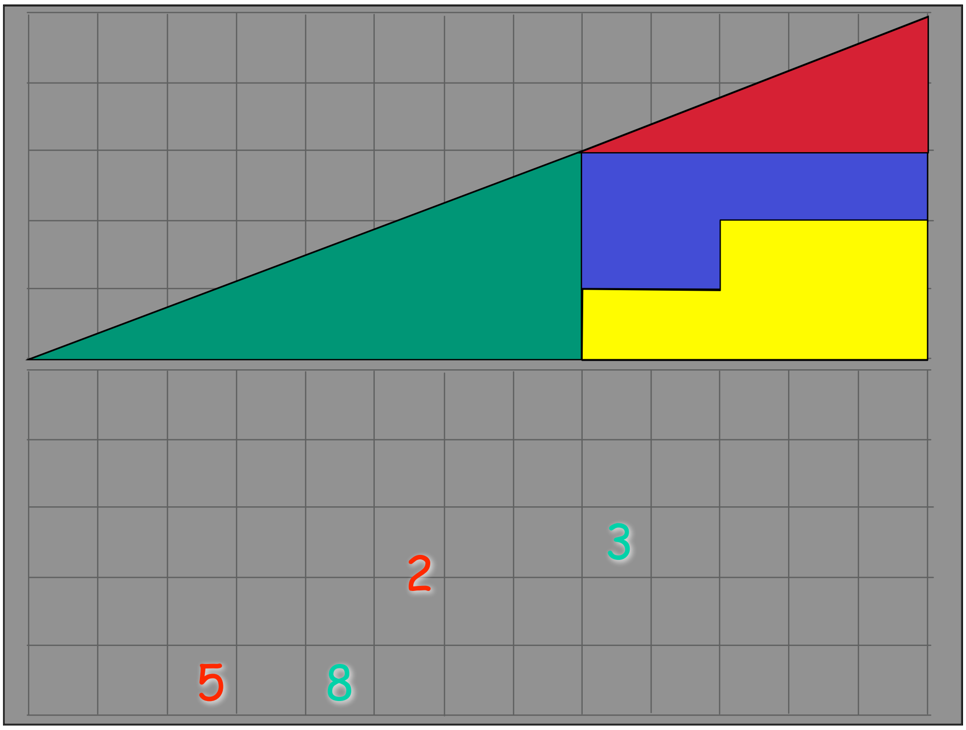
Schreibt man zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen als Bruch, dann konvergiert die Folge dieser Brüche gegen die Zahl 1,61833....

Fibonacci-Zahlen



$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$




3
2
5
8

Fibonacci Spirale