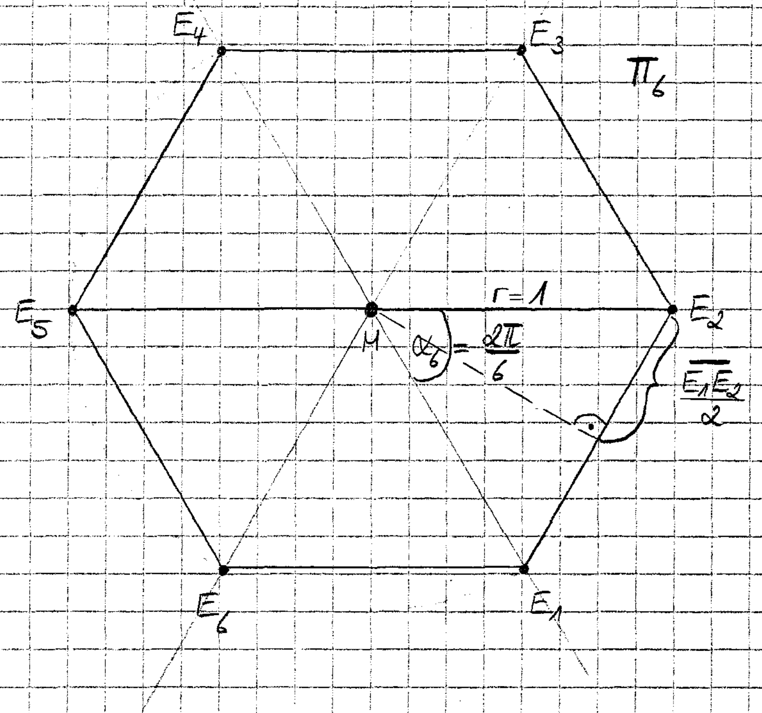
Blatt 12

Aufg. A

Beispiel: 6-Eck $(n=6)$



$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$$

1.) $$\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{\overline{E_1E_2}}{2}}{\underset{(r=1)}{\underset{\uparrow}{1}}} = \frac{\overline{E_1E_2}}{2} \iff \underline{\underline{\overline{E_1E_2}}} = 2\cdot\sin\frac{\alpha_n}{2} \quad \alpha_n = \frac{2\pi}{n}$$

$$= 2\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}$$

$$= \underline{\underline{2\cdot\sin\frac{\pi}{n}}}$$

2.) siehe Extrazettel! (Folge der Umfänge konvergiert von unten [redacted] gegen 2π!)

$$\left([redacted] \quad U_4 = 4\cdot\sqrt{2}, \text{ u.s.w.} \atop \left(\overline{E_1E_2} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\right) \right)$$

$$\underline{\underline{U_n}} = n\cdot\overline{E_1E_2} = n\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{n} = \underline{\underline{2n\sin\frac{\pi}{n}}} \quad \text{(explizite Formel)}$$

3.) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} \underset{\left(x_n=\frac{\pi}{n}\right)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\left(n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = \underline{\underline{1}}$$

$$n\cdot\sin\frac{\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi, \quad \underline{\text{denn:}}\ 2n\sin\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi \text{ (siehe 2.)}$$

4.) siehe Extrazettel!

Aufg. A 2.)

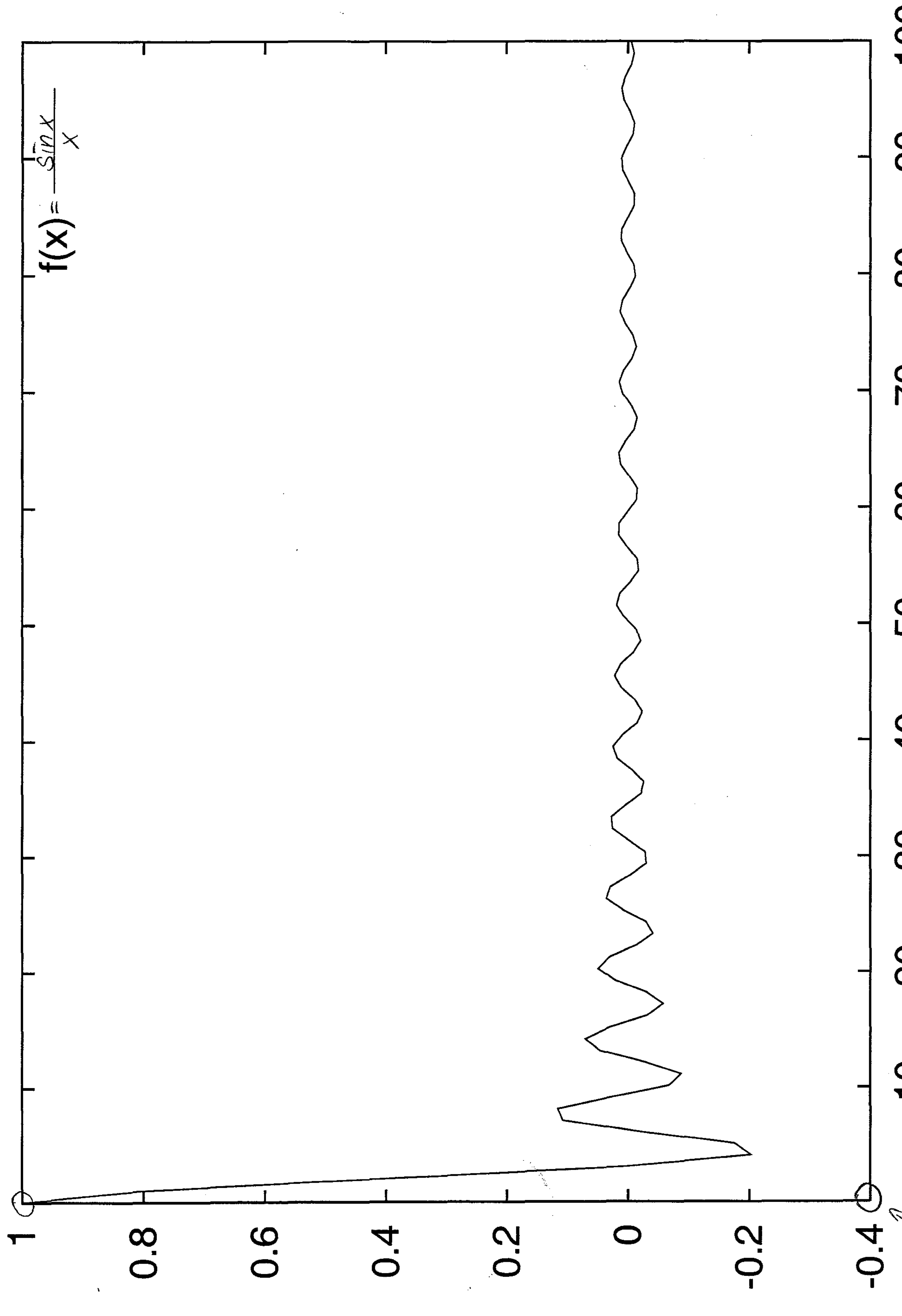
Tabelle1

	n	($\overline{E_1E_2}$) S_n	U_n $= n \cdot S_n = n \cdot \overline{E_1E_2}$
2^2	4	1,4142135624	5,6568542495
2^3	8	0,7653668647	6,1229349178
2^4	16	0,3901806440	6,2428903045
2^5	32	0,1960342807	6,2730969811
2^6	64	0,0981353487	6,2806623139
2^7	128	0,0490824570	6,2825545019
2^8	256	0,0245430766	6,2830276023
2^9	512	0,0122717693	6,2831458807
2^{10}	1024	0,0061359135	6,2831754506
2^{11}	2048	0,0030679604	6,2831828430
2^{12}	4096	0,0015339806	6,2831846911
2^{13}	8192	0,0007669904	6,2831851532
2^{14}	16384	0,0003834952	6,2831852687
2^{15}	32768	0,0001917476	6,2831852976
2^{16}	65536	0,0000958738	6,2831853048
2^{17}	131072	0,0000479369	6,2831853066
2^{18}	262144	0,0000239684	6,2831853070
2^{19}	524288	0,0000119842	6,2831853071
2^{20}	1048576	0,0000059921	6,2831853072

konvergiert von unten gegen 2π !!!

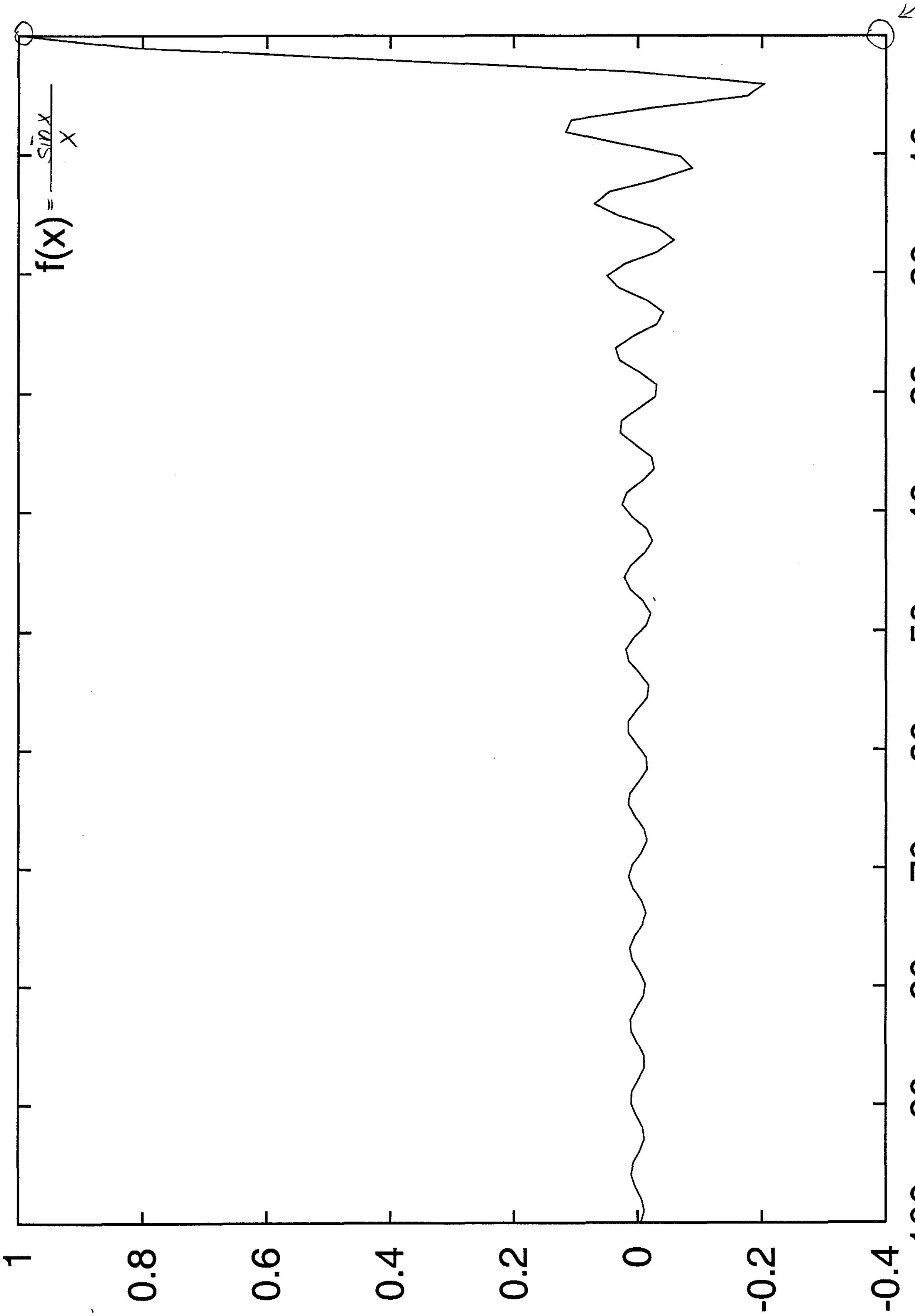
$2\pi \approx 6{,}283185307179586$

Aufg. A 4.) (Teil 1)



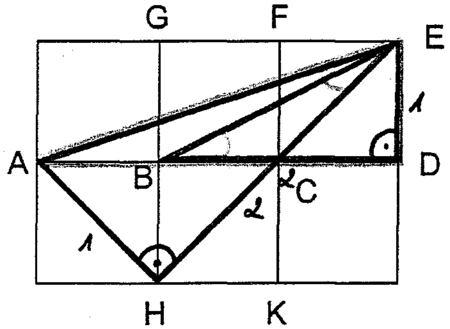
Die 0 liegt nicht in der Definitionsmenge der Fkt. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$!!!

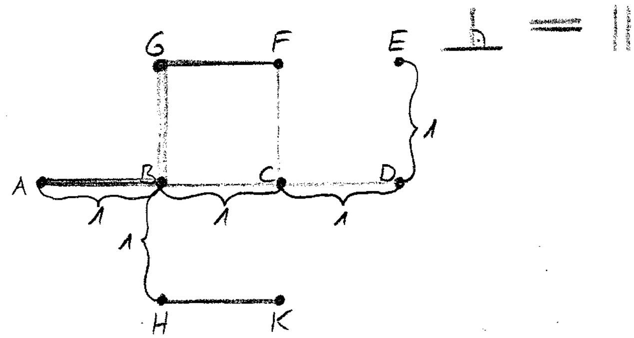
Aufg. A 4.) (Teil 2)



Die Null liegt nicht in der Definitionsmenge der Fkt. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$!!!

Hinweis zu Aufgabe B1. (*ergänzen Sie die zwei Lücken, die mit „Hier rechnen“ markiert sind*)





Es gilt: $|AB| = |BC| = |CD| = |ED| = |BH| = 1$ und $AB \parallel GF \parallel HK$, $GB \parallel FC$, $GB \perp AD$

Bestimmen Sie in den beiden Dreiecken $\underline{\triangle AHE}$ und $\underline{\triangle EDB}$ die Seitenlängen und zeigen Sie so, dass beide Dreiecke ähnlich sind.

Hier rechnen

1.) $|BC| = |CD| = |ED| = 1 \Rightarrow |BD| = 2$ & $|ED| = 1 \Rightarrow \frac{|ED|}{|BD|} = \frac{1}{2}$

2.) $GB \perp AD \wedge GB \parallel FC \Rightarrow FC \perp AD$. Außerdem: $|CD| = |ED| = 1 \overset{\text{insges.}}{\Rightarrow} |FC| = |FE| = 1 \wedge |\sphericalangle EDB| = 90° = \frac{\pi}{2}$

3.) Diagonale im Quadrat: $d = a\sqrt{2}$, hier: $a = 1 \Rightarrow d = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|AH|}{|HE|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

4.) $|\sphericalangle EHA| = 90° = \frac{\pi}{2}$ (da Winkel zw. den Diagonalen benachbarter Quadrate)

Daraus folgt $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle AEH|$ (1)

1.),2.),3.),4.) $\Rightarrow$ ΔAHE & ΔEDB sind ähnlich nach SWS-Satz!

Im Dreieck $\underline{\triangle ADE}$ gilt

$|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle EDA| + |\sphericalangle AED| = \pi$ (2) (Winkelsumme im Δ ist $180° \hat{=} \pi$)

$|\sphericalangle EDA| = \frac{\pi}{2}$ $\hat{=} 90°$ und $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AEH| + |\sphericalangle HED| = |\sphericalangle AEH| + \frac{\pi}{4}$ ← ($|\sphericalangle HED|$ ist halber $90°$-Winkel, da $\overline{HE}$ Diag.)

Eingesetzt in (2) ergibt

$$|\sphericalangle DAE| + \frac{\pi}{2} + |\sphericalangle AEH| + \frac{\pi}{4} = \pi \quad \Big| -\frac{\pi}{2} \Big| -\frac{\pi}{4}$$

Also $|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle AEH| = \frac{\pi}{4}$

Mit (1) ergibt sich (1)

$$|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle DBE| = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

!!! $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle DBE$, $\frac{\pi}{4}$ (= $\sphericalangle HED$ bzw. $\sphericalangle CED$) !

Berechnen Sie nun für die $\boxed{\text{drei}}$ Winkel in (3) den Tangens (Abbildung oben beachten), bilden die Umkehrfunktion und setzen es in (3) ein.

Hier rechnen

$\tan(\sphericalangle DAE) = \frac{|ED|}{|AD|} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |\sphericalangle DAE| = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

$\tan(\sphericalangle DBE) = \frac{|ED|}{|BD|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\sphericalangle DBE| = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

Außerdem: $|\sphericalangle HED| = \frac{\pi}{4}$ & $\tan(\sphericalangle HED) = \frac{|CD|}{|ED|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$

Damit ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

B 2.1 & 3

Berechnung von Sn(1):

k	k-ter Summand	n	Summe Sn(1)
0	1,0000000000	0	1,0000000000
1	-0,3333333333	1	0,6666666667
2	0,2000000000	2	0,8666666667
3	-0,1428571429	3	0,7238095238
4	0,1111111111	4	0,8349206349
5	-0,0909090909	5	0,7440115440
6	0,0769230769	6	0,8209346209
7	-0,0666666667	7	0,7542679543
8	0,0588235294	8	0,8130914837
9	-0,0526315789	9	0,7604599047
10	0,0476190476	10	0,8080789524
11	-0,0434782609	11	0,7646006915
12	0,0400000000	12	0,8046006915
13	-0,0370370370	13	0,7675636544
14	0,0344827586	14	0,8020464131
15	-0,0322580645	15	0,7697883485
16	0,0303030303	16	0,8000913789
17	-0,0285714286	17	0,7715199503
18	0,0270270270	18	0,7985469773
19	-0,0256410256	19	0,7729059517
20	0,0243902439	20	0,7972961956

$S_n(1)$ konvergiert alternierend & recht langsam gegen $\frac{\pi}{4}$.

(= arctan (1))

$\frac{\pi}{4} \approx$ 0,7853981634

B 2.2 und 4

Berechnung von Sn(1/2) + Sn(1/3):

k bzw. n	k-ter Summand	Summe Sn(1/2)	k-ter Summand	Summe Sn(1/3)
0	0,5000000000	0,5000000000	0,3333333333	0,3333333333
1	-0,0416666667	0,4583333333	-0,0123456790	0,3209876543
2	0,0062500000	0,4645833333	0,0008230453	0,3218106996
3	-0,0011160714	0,4634672619	-0,0000653211	0,3217453785
4	0,0002170139	0,4636842758	0,0000056450	0,3217510236
5	-0,0000443892	0,4636398866	-0,0000005132	0,3217505104
6	0,0000093900	0,4636492766	0,0000000482	0,3217505586
7	-0,0000020345	0,4636472421	-0,0000000046	0,3217505540
8	0,0000004488	0,4636476909	0,0000000005	0,3217505544
9	-0,0000001004	0,4636475905	0,0000000000	0,3217505544
10	0,0000000227	0,4636476132	0,0000000000	0,3217505544
11	-0,0000000052	0,4636476080	0,0000000000	0,3217505544
12	0,0000000012	0,4636476092	0,0000000000	0,3217505544
13	-0,0000000003	0,4636476089	0,0000000000	0,3217505544
14	0,0000000001	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544
15	0,0000000000	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544
16	0,0000000000	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544
17	0,0000000000	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544
18	0,0000000000	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544
19	0,0000000000	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544
20	0,0000000000	0,4636476090	0,0000000000	0,3217505544

B 2.2 und 4

Tabelle1

Sn(1/2) + Sn(1/3)
0,8333333333
0,7793209877
0,7863940329
0,7852126404
0,7854352994
0,7853903970
0,7853998352
0,7853977961
0,7853982453
0,7853981449
0,7853981676
0,7853981624
0,7853981636
0,7853981633
→ 0,7853981634
0,7853981634
0,7853981634
0,7853981634
0,7853981634
0,7853981634
0,7853981634

$S_n(\frac{1}{2}) + S_n(\frac{1}{3})$ konvergiert auch alternierend, aber viel <u>schneller</u> als $S_n(1)$ gegen $\frac{\pi}{4}$.

(= arctan(1))

$\frac{\pi}{4} \approx$ 0,7853981634