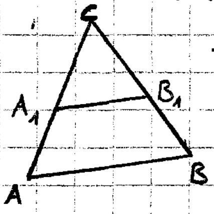
Zu Blatt 11:

* Und weil man hier deshalb die Umkehrung des 1. Strahlensatzes anwenden kann:

Beispiel:



$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$$

Aufg. 1 (eine mögliche Lösung)

a) Weil die Punkte A_1, B_1 und D_1 die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, und [redacted] $\overline{AB}$ (Außenseiten des großen Dreiecks) genau in der Mitte teilen*, ist:

1.) die Strecke $\overline{A_1B_1}$ parallel zur Strecke $\overline{AB}$,

2.) " " $\overline{B_1D_1}$ " " " $\overline{AC}$, und

3.) " " $\overline{A_1D_1}$ " " " $\overline{BC}$.

$$\Downarrow$$

Es entstehen die Parallelogramme $AA_1B_1D_1$ & $A_1B_1BD_1$.
(Gegenüberliegende Seiten sind parallel)

$$\Downarrow$$

Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang!

$$\overline{AD_1} = \overline{A_1B_1} = \overline{D_1B},$$

$$\overline{AA_1} = \overline{D_1B_1} \text{ und } \overline{A_1D_1} = \overline{B_1B}.$$

$$\Downarrow$$

Die Dreiecke AD_1A_1, $D_1B_1A_1$ und D_1BB_1 haben die gleichen Seitenlängen & sind deshalb kongruent nach "SSS-Satz"!

$$\Downarrow$$

Die Dreiecke AD_1A_1, $D_1B_1A_1$ und D_1BB_1 haben (weil sie kongruent sind) den gleichen Flächeninhalt!
("deckungsgleich")

* und weil man hier deshalb die Umkehrung des 1. Strahlensatzes anwenden kann !!!

b) analog zu a) !

Weil die Punkte A_{n+1}, B_{n+1} und D_{n+1} die Strecken $\overline{A_nC}$, $\overline{B_nC}$ und $\overline{A_nB_n}$ genau in der Mitte teilen*, [redacted] sind:

1.) die Strecken $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}$ parallel zu den Strecken $\overline{A_nB_n}$,

2.) " " $\overline{B_{n+1}D_{n+1}}$ " " " " $\overline{A_nC}$, und

3.) " " $\overline{A_{n+1}D_{n+1}}$ " " " " $\overline{B_nC}$.

$\Downarrow$ (Gegenüberliegende Seiten sind parallel.)

Es entsehen die Parallelogramme $A_nA_{n+1}B_{n+1}D_{n+1}$ & $A_{n+1}B_{n+1}B_nD_{n+1}$.

$\Downarrow$

Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang!

$$\overline{A_nD_{n+1}} = \overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \overline{D_{n+1}B_n},$$

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \overline{D_{n+1}B_{n+1}} \text{ und } \overline{A_{n+1}D_{n+1}} = \overline{B_{n+1}B_n}.$$

$\Downarrow$

Die Dreiecke $A_nD_{n+1}A_{n+1}$, $D_{n+1}B_{n+1}A_{n+1}$ und $D_{n+1}B_nB_{n+1}$ haben die gleichen Seitenlängen & sind deshalb kongruent nach "SSS-Satz"!

$\Downarrow$

Die Dreiecke $A_nD_{n+1}A_{n+1}$, $D_{n+1}B_{n+1}A_{n+1}$ und $D_{n+1}B_nB_{n+1}$ haben (weil sie kongruent sind) alle den gleichen Flächeninhalt!

c) Die Seitenlängen des Dreiecks $A_1 D_2 A_2$ sind nur halb so lang wie die des Dreiecks $A D_1 A_1$

halbe Seitenlänge $\Rightarrow \frac{1}{4}$ des Flächeninhalts

$\Rightarrow r =$ [redacted] 4.

<u>oder:</u>

auch klar!

$A D_1 A_1$, $D_1 B_1 A_1$, $D_1 B B_1$ und $A_1 B_1 C$ kongruent!

$\Rightarrow$ Alle haben gleichen Flächeninhalt!

auch klar!

Außerdem: $A_1 D_2 A_2$, $D_2 B_2 A_2$, $D_2 B_1 B_2$ und $A_2 B_2 C$ kongruent!

$\Rightarrow$ Alle haben gleichen Flächeninhalt!

Außerdem ergibt der Flächeninhalt von den $\underline{4}$ kleineren oben genannten Dreiecken den des großen $A_1 B_1 C$ bzw. $A D_1 A_1$!

$\Rightarrow r =$ [redacted] 4.

d) Das äußere große Dreieck habe den Flächeninhalt 1.

Man betrachte nun die Reihe der hellgrauen Dreiecke, die Reihe der weißen Dreiecke & die Reihe der dunkelgrauen Dreiecke getrennt.

Dann gilt für den Flächeninhalt:

1.) hellgraue Reihe + weiße Reihe + dunkelgraue Reihe = 1

$\Rightarrow$ Flächeninhalt der hellgrauen Reihe $= \frac{1}{3}$.

2.) Flächeninhalt der hellgrauen Reihe $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$

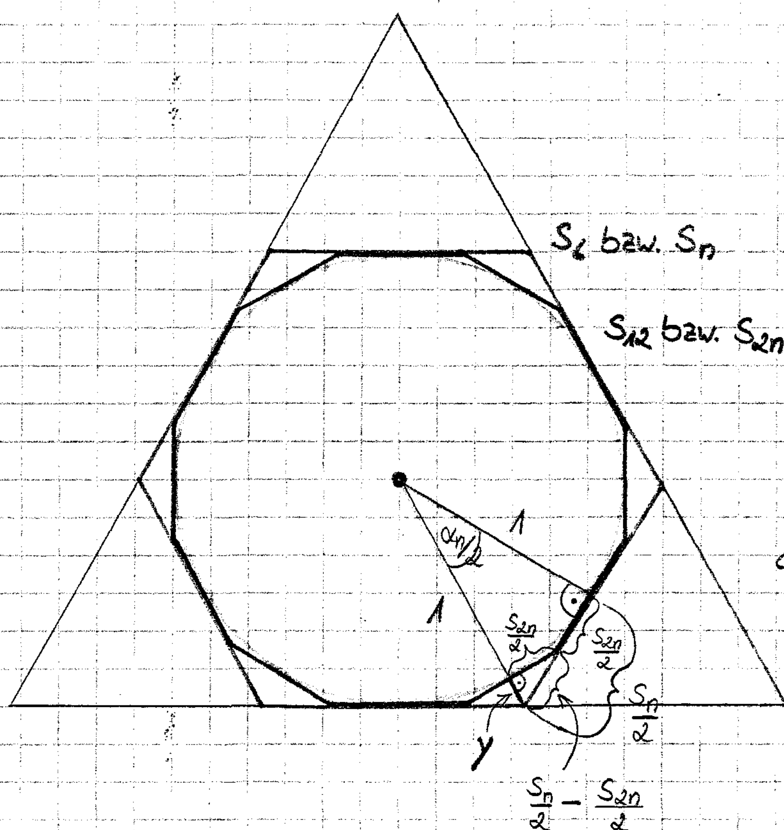
u.s.w.

$A D_1 A_1$ hat $\frac{1}{4}$ Flächeninhalt von ABC $A_1 D_2 A_2$ hat $\frac{1}{4}$ Flächeninh. von $A D_1 A_1$

1.), 2.) $\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{3}$

Aufg 2

a)



<u>anderer Weg für b) :</u> !

$$\tan \frac{\alpha_n}{2} = \frac{S_n/2}{1} = \frac{S_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = 2 \tan \frac{\alpha_n}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \quad S_n = 2 \tan \frac{2\pi/n}{2}$$

$$= 2 \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \quad S_{2n} = 2 \tan \frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\cancel{2} \tan \frac{\pi}{2n}}{\cancel{2} \tan \frac{\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{2n} = S_n \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}}$$

b) (1) <u>Pythagoras:</u> $\quad 1^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 = (1+y)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \frac{S_n^2}{4}} = 1 + y$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{1 + \frac{S_n^2}{4}} - 1$$

(2) <u>Pythagoras:</u> $\quad y^2 + \left(\frac{S_{2n}}{2}\right)^2 = \left(\frac{S_n}{2} - \frac{S_{2n}}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + \cancel{\frac{S_{2n}^2}{4}} = \frac{S_n^2}{4} - 2\,\frac{S_n S_{2n}}{4} + \cancel{\frac{S_{2n}^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S_n S_{2n}}{2} = \frac{S_n^2}{4} - y^2 \quad \Big| \cdot \frac{2}{S_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{2n} = \frac{S_n}{2} - \frac{2y^2}{S_n}$$

$\Rightarrow$ Einsetzen der Formel für y^2

$$S_{2n} = \frac{S_n}{2} - \frac{2}{S_n}\left(\sqrt{1 + \frac{S_n^2}{4}} - 1\right)^2$$

$$= \frac{S_n}{2} - \frac{2}{S_n}\left(1 + \frac{S_n^2}{4} - 2\sqrt{1 + \frac{S_n^2}{4}} + 1\right)$$

$$\Rightarrow S_{2n} = \frac{\cancel{S_n}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{S_n}}{\cancel{2}} + \frac{4}{S_n}\sqrt{1+\frac{S_n^2}{4}} - \frac{4}{S_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{2n} = \frac{4}{S_n}\left(\sqrt{1+\frac{S_n^2}{4}} - 1\right)}$$

In Aufgabenteil 3.) sieht man bei der Berechnung der U_{n_S}, dass bei dieser Formel irgendwann eine "Auslöschung" stattfindet, die das Ergebnis verfälscht !!!

Dieses Problem kann man umgehen, indem man die Formel mit Hilfe einer "Taylor-Approximation" umformuliert:

Für $x \approx 0$ gilt: $f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \quad \text{mit } x_0 = 0 \leftarrow \text{Taylorentwicklung um den Punkt } 0$$

$$\Rightarrow f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

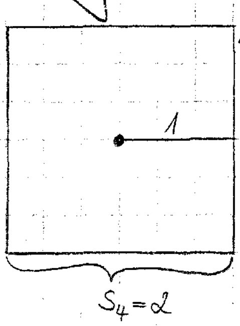
$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \quad (\text{für } x \approx 0)$$

$$\Rightarrow S_{2n} \approx \frac{4}{S_n}\left(\cancel{1} + \frac{S_n^2}{8} - \frac{S_n^4}{128} + \frac{S_n^6}{1024} - \cancel{1}\right) \quad \text{für } \frac{S_n^2}{4} \approx 0$$

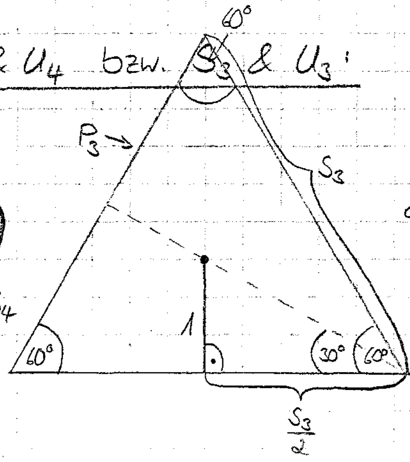
(also z.B. ab $n = 2^{11} = 2048$
bzw. $n = 3 \cdot 2^{10} = 3072$)

c) Bestimmung der Startwerte S_4 & U_4 bzw. S_3 & U_3:



Kreisradius 1
$\Rightarrow S_4 = 2$

$\Rightarrow U_4 = 4 \cdot S_4 = 8$



$$\frac{2}{\tan\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\frac{S_3}{2}} = \frac{2}{S_3}$$

$$\Leftrightarrow S_3 = \frac{2}{\tan 30°} = \frac{2}{\tan \pi/6} \approx 3.4641016$$

$$\left(180° \mathrel{\hat{=}} \pi \quad 30° = \frac{1}{6} \text{ von } 180° = \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow U_3 = 3 \cdot S_3 = \frac{6}{\tan \pi/6}$$

Aufg. 2 c) (1. Teil)

Tabelle1

	n	S_n	U_n
2^2	4	2,0000000000	8,0000000000
2^3	8	0,8284271247	6,6274169980
2^4	16	0,3978247348	6,3651957561
2^5	32	0,1969828067	6,3034498149
2^6	64	0,0982536995	6,2882367705
	128	0,0490972442	6,2844472599
	256	0,0245449248	6,2835007383
	512	0,0122720003	6,2832641614
	1024	0,0061359424	6,2832050205
	2048	0,0030679640	6,2831902354
	4096	0,0015339811	6,2831865393
	8192	0,0007669904	6,2831856168
	16384	0,0003834952	6,2831853819
2^{15}	32768	0,0001917476	6,2831853511
2^{16}	65536	0,0000958738	6,2831853819
	131072	0,0000479369	6,2831850476
	262144	0,0000239684	6,2831817392
	524288	0,0000119842	6,2831850476
2^{20}	1048576	0,0000059921	6,2832011673

← wird aufgrund von Auslöschung in der Formel für S_{2n} wieder größer!

$2\pi \approx 6{,}28318530717958 6$

Aufg. 2 c.) mit Taylorapproximation für $x \approx 0$, also ab $n = 2^{11} = 2048$

(1. Teil)

Tabelle1

	n	S_n	U_n
2^2	4	2,0000000000	8,0000000000
2^3	8	0,8284271247	6,6274169980
2^4	16	0,3978247348	6,3651957561
	32	0,1969828067	6,3034498149
	64	0,0982536995	6,2882367705
	128	0,0490972442	6,2844472599
	256	0,0245449248	6,2835007383
	512	0,0122720003	6,2832641614
2^{10}	1024	0,0061359424	6,2832050205
2^{11}	2048	0,0030679640	6,2831902355
	4096	0,0015339811	6,2831865392
	8192	0,0007669904	6,2831856152
	16384	0,0003834952	6,2831853842
	32768	0,0001917476	6,2831853264
	65536	0,0000958738	6,2831853120
	131072	0,0000479369	6,2831853084
	262144	0,0000239684	6,2831853075
	524288	0,0000119842	6,2831853072
2^{20}	1048576	0,0000059921	6,2831853072

mit Taylorapproximation der Formel für S_{2n} !

$2\pi \approx 6{,}283185307179586$

Aufg. 2 c.) (2. Teil)

Tabelle1

	n	S_n	U_n
$3 \cdot 2^0$	3	3,4641016151	10,3923048454
$3 \cdot 2^1$	6	1,1547005384	6,9282032303
$3 \cdot 2^2$	12	0,5358983849	6,4307806183
$3 \cdot 2^3$	24	0,2633049952	6,3193198842
$3 \cdot 2^4$	48	0,1310869256	6,2921724303
	96	0,0654732208	6,2854291993
	192	0,0327278443	6,2837461000
	384	0,0163628268	6,2833254941
	768	0,0081812765	6,2832203532
	1536	0,0040906211	6,2831940686
	3072	0,0020453084	6,2831874976
	6144	0,0010226539	6,2831858557
	12288	0,0005113269	6,2831854512
$3 \cdot 2^{13}$	24576	0,0002556635	6,2831853435
$3 \cdot 2^{14}$	49152	0,0001278317	6,2831852378
	98304	0,0000639159	6,2831853435
	196608	0,0000319579	6,2831838718
	393216	0,0000159790	6,2831853435
	786432	0,0000079895	6,2831620152
	1572864	0,0000039947	6,2831853435
$3 \cdot 2^{20}$	3145728	0,0000019975	6,2835117208

wird aufgrund von Auslöschung in der Formel für s_{2n} zuerst kleiner als 2π & dann wieder größer!

$2\pi \approx 6{,}28318530717958 6$

Aufg. 2 c.) mit Taylorapproximation für $x \approx 0$, also ab $n = 3 \cdot 2^{10} = 3072$ (2. Teil)

Tabelle1

	n	S_n	U_n
$3 \cdot 2^0$	3	3,4641016151	10,3923048454
$3 \cdot 2^1$	6	1,1547005384	6,9282032303
$3 \cdot 2^2$	12	0,5358983849	6,4307806183
	24	0,2633049952	6,3193198842
	48	0,1310869256	6,2921724303
	96	0,0654732208	6,2854291993
	192	0,0327278443	6,2837461000
	384	0,0163628268	6,2833254941
	768	0,0081812765	6,2832203532
$3 \cdot 2^9$	1536	0,0040906211	6,2831940686
$3 \cdot 2^{10}$	3072	0,0020453084	6,2831874975
	6144	0,0010226539	6,2831858548
	12288	0,0005113269	6,2831854441
	24576	0,0002556635	6,2831853414
	49152	0,0001278317	6,2831853157
	98304	0,0000639159	6,2831853093
	196608	0,0000319579	6,2831853077
	393216	0,0000159790	6,2831853073
	786432	0,0000079895	6,2831853072
	1572864	0,0000039947	6,2831853072
$3 \cdot 2^{20}$	3145728	0,0000019974	6,2831853072

mit Taylorapproximation der Formel für S_{2n}!

$2\pi \approx 6{,}283185307179586$