Blatt 9:

Aufg. 1

a) ..., wenn die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist:

! $a_{n+1} = a_n + d$ (rekursive Formel) (d = konstanter Abstand zwischen je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder)

$[\,a_n = a_0 + n \cdot d$ (explizite ")$]$

$(a_0 = a_0\,,\; a_1 = a_0 + d,\; a_2 = a_0 + 2d,\; a_3 = a_0 + 3d, \ldots)$

b) ..., wenn das Verhältnis zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist:

! $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (rekursive Formel) (q = konstantes Verhältnis/Quotient zwischen je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder)

$[\,a_n = a_0 \cdot q^n$ (explizite ")$]$

$(a_0 = a_0,\; a_1 = a_0 \cdot q,\; a_2 = a_0 \cdot q^2,\; a_3 = a_0 \cdot q^3, \ldots)$

Aufg. 2

a)

$$\overset{5^0}{0},\overset{5^{-1}}{1}\overset{5^{-2}}{2}\overset{5^{-3}}{3} = 0 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-3}$$

$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125}$$

$$= \frac{25}{125} + \frac{10}{125} + \frac{3}{125} = \frac{38}{125} = \underline{\underline{0{,}304_{10}}}$$

b)

$$0,\overline{1}_3 = 0,111111\ldots_3 = 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4} + \ldots$$

geschlossene Formel?

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1$$

geom. Reihe!

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \;\text{"}\; \underline{\underline{0{,}5_{10}}}$$

$$\left(= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots = 0{,}4\overline{9}_{10} \;\; (\approx 0{,}5_{10}) \right)$$

bzw.:

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k} = \lim_{n \to \infty} a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

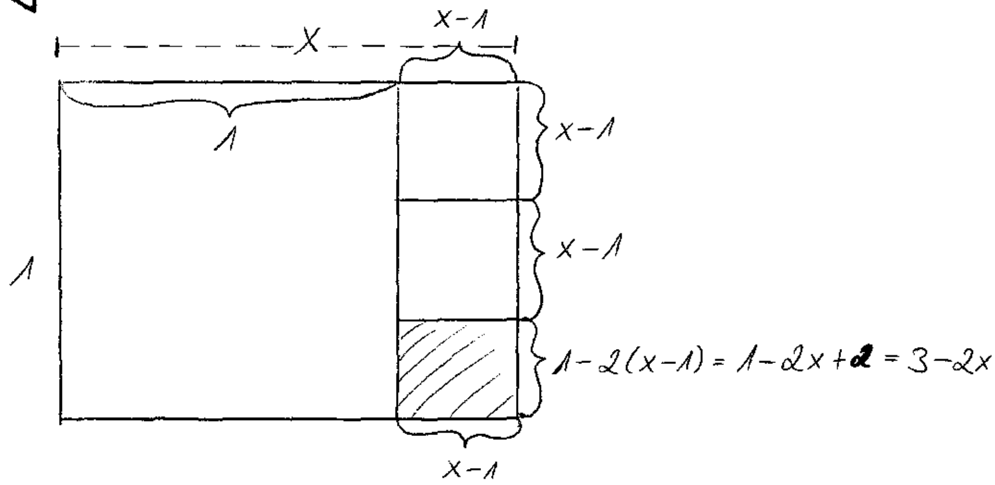
$$= a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \left(= a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \right)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \right)$$

geom. Reihe !!!

hier: $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}^{\xrightarrow{n \to \infty} 0}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Aufg. 3



großes RE: kleines RE:

$$\frac{x}{1} = \frac{x-1}{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow x(3-2x) = x-1$$

$$\Leftrightarrow 3x-2x^2 = x-1 \quad |-x \quad |+1$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+2x+1 = 0 \quad |:(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-\frac{1}{2} = 0 \quad |+\frac{1}{2} \quad |+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad |\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad |+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1{,}366$$

($\leftarrow \frac{-\sqrt{3}+1}{2} \approx -0{,}366$ fällt weg, da Seitenlänge positiv!)

Aufg. 4

$m = 14$

$f_1 = 9$, $f_2 = 11$ Wird klar, wenn man die **1 anguckt**:

$1 \cdot x = y$, $y \bmod 14 = 9$ mit $x < 14$

$\Leftrightarrow (x = y,)\ x \bmod 14 = 9$ mit $x < 14 \Rightarrow x = 9$

$1 \cdot \tilde{x} = \tilde{y}$, $\tilde{y} \bmod 14 = 11$ mit $\tilde{x} < 14$

$\Leftrightarrow (\tilde{x} = \tilde{y},)\ \tilde{x} \bmod 14 = 11$ mit $\tilde{x} < 14 \Rightarrow \tilde{x} = 11$

(Außerdem:
$9 \cdot 11 = 99 = \underbrace{7 \cdot 14}_{98} + 1$
$\Rightarrow 9 \cdot 11 \equiv 1 \bmod 14 \Rightarrow$ gleiche Diagramme) und

Bsp:

für $f_1 = 9$:

$2 \cdot 9 = 18$, $18 \bmod 14 = 4$ ✓

$3 \cdot 9 = 27$, $27 \bmod 14 = 13$ ✓

für $f_2 = 11$:

$2 \cdot 11 = 22$, $22 \bmod 14 = 8$ ✓

$3 \cdot 11 = 33$, $33 \bmod 14 = 5$ ✓

Aufg. 5

Berechnung der **NS**: $\frac{1}{9}x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{9}x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \vee \frac{1}{9}x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\pm 3}}$

a) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{9}x^2 - 1 = \frac{1}{3}x^2 - 1$

$$n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{\frac{1}{9}x^3 - x}{\frac{1}{3}x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x}{\frac{1}{3}x^2 - 1} - \frac{\frac{1}{9}x^3 - x}{\frac{1}{3}x^2 - 1} = \frac{\frac{3}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^3 - x + x}{\frac{1}{3}x^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}x^3}{\frac{1}{3}x^2 - 1} = \frac{2x^3}{\frac{9}{3}x^2 - 9} = \frac{\mathbf{2x^3}}{\mathbf{3x^2 - 9}}$$

b) $x_0 = \underline{\underline{-1{,}45}}$

$$\frac{2 \cdot (-1{,}45)^3}{3 \cdot (-1{,}45)^2 - 9} \approx \underline{\underline{2{,}2645311}}$$

$$\Rightarrow x_1 = n(x_0) = \left(\frac{\frac{2}{9}x_0^3}{\frac{1}{3}x_0^2 - 1} = \frac{\frac{2}{9} \cdot (-1{,}45)^3}{\frac{1}{3} \cdot (-1{,}45)^2 - 1} \approx 2{,}2645311\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = n(x_1) = \frac{2 \cdot (2{,}2645311)^3}{3(2{,}2645311)^2 - 9} \approx \underline{\underline{3{,}637905}}$$

$$\left(\Rightarrow x_3 = n(x_2) = \frac{2 \cdot (3{,}637905)^3}{3 \cdot (3{,}637905)^2 - 9} \approx \underline{\underline{3{,}1361904}}\right)$$

Aufg. 5 c), d)