Zu Blatt 8

Aufg. 1

Anzahl der minimalen Taxirouten von $A=(0;0)$ nach $B=(21;19)$

ist $W(21;19) = \binom{21+19}{21} = \binom{40}{21} = \frac{40!}{21!\,19!} \approx 1{,}3128241 \cdot 10^{11}$.

$$\left[\overset{\shortparallel}{} \binom{21+19}{19} = \binom{40}{19} = \frac{40!}{19!\,21!} \right]$$

Aufg. 2

Zur Notation: $c(n,k) := \binom{n}{k}$

$\boxed{\text{Hilfestellung}}$ vom Zettel, die Benutzt werden darf:

$$c(n+1,k) = c(n,k-1) + c(n,k) \quad \text{für } n,k \in \mathbb{N}_0$$

d.h. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ für $n,k \in \mathbb{N}_0$

alles um 1 erhöht: $\binom{n+2}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}$

und

$$c(n,0) = c(n,n) = 1$$

d.h. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Zu beweisen ist damit nun die Hockeyschläger-Regel, d.h.:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

bzw. $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ "Hockeyschläger-Regel"

bzw.: $\sum_{i=k}^{n} c(i,k) = c(n+1,k+1)$ bzw. $\sum_{i=0}^{n} c(i+k,k) = (n+k+1,k+1)$

Beweis per Induktion nach n: siehe nächster Zettel!

Achtung: Induktionsanfang: $n=k$!

Achtung: Induktionsanfang: $n=0$!

Zur "Hockey-Schlägerregel" aus Aufg. 2:

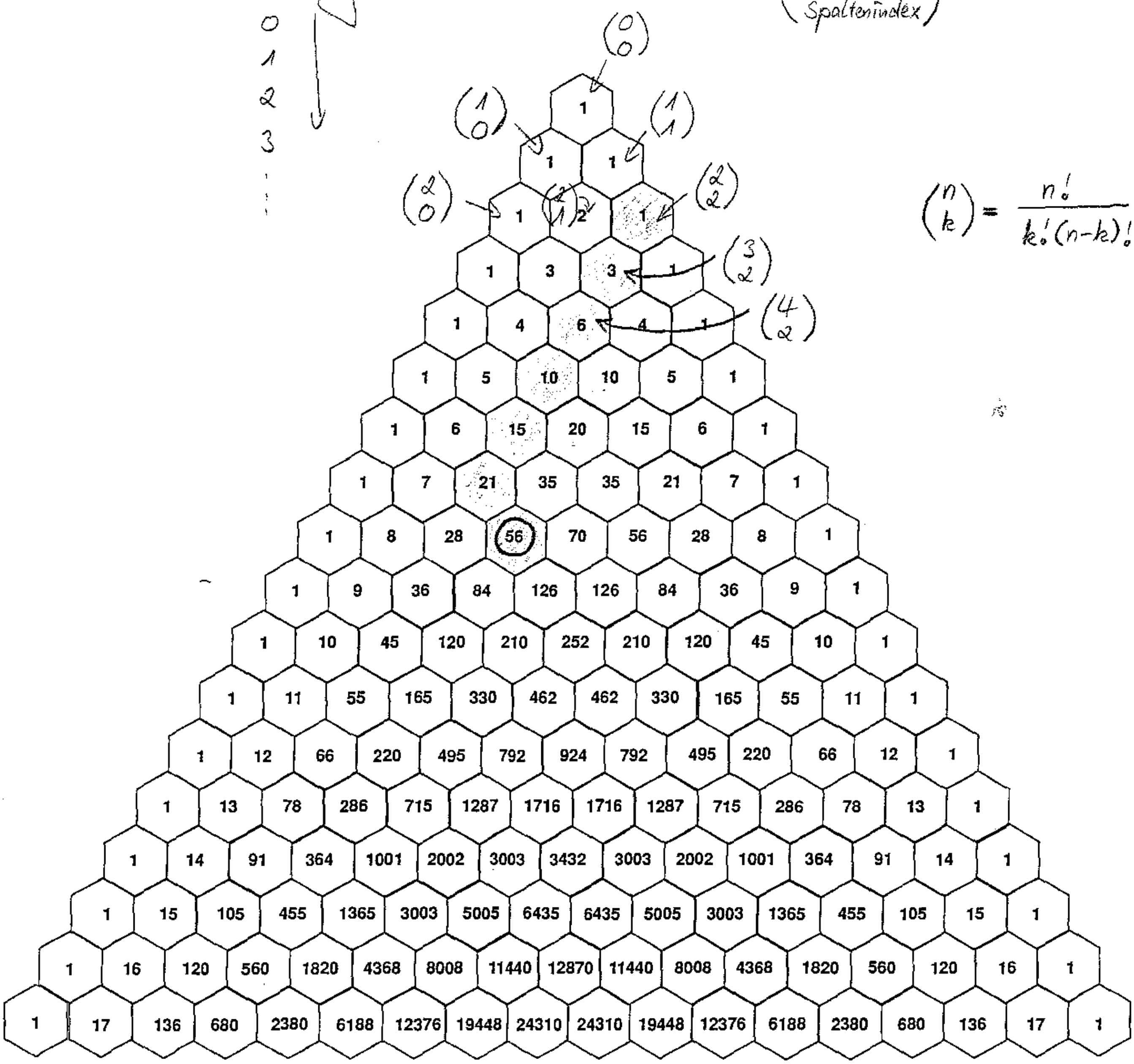
Pascal's Triangle: Divisibility by 3

Zählung: 0 1 2 3 ...

0
1
2
3
⋮

$\begin{pmatrix} \text{Zeilenindex} \\ \text{Spaltenindex} \end{pmatrix}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



$$1+3+6+10+15+21 = \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2} = \binom{8}{3} = 56$$

Zu Blatt 8:

Aufg. 2

Beispiel:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}=\binom{8}{2}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$$

allgemein: (Man muss immer am rechten Rand des Dreiecks anfangen!!!)

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\dots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

bzw.: $$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1},\quad k,n\in\mathbb{N} \text{ bel. mit } n\geq k \text{ !!!}$$

$$\left(\sum_{i=k}^{n} c(i,k) = c(n+1,k+1)\right)$$

! Beweis per Induktion nach n:

I.A.: $n=k$

$$\sum_{i=k}^{k}\binom{i}{k}=\binom{k}{k}=1=\binom{k+1}{k+1} \checkmark$$

I.V.: Für $n\in\mathbb{N}$, $n\geq k$ bel., aber fest gelte $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

I.S.: $n\to n+1$

z.z.: $\sum_{i=k}^{n+1}\binom{i}{k}=\binom{n+2}{k+1}$.

$$\sum_{i=k}^{n+1}\binom{i}{k}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}+\binom{n+1}{k}\underset{\text{I.V.}}{=}\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k+1}.$$

siehe Hilfssatz!!!
bzw. Tip!!!

q.e.d.

Aufg. 3

Wiederholung: 11er-Potenzen

$$\left(\begin{array}{ccccccclc} & & & 1 & & & & \longleftarrow & 1 = 11^0 \\ & & 1 & & 1 & & & \longleftarrow & 11 = 11^1 \\ & 1 & & 2 & & 1 & & \longleftarrow & 121 = 11^2 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \leftarrow & 1331 = 11^3 \end{array}\right)$$

Hier:

101er-Potenzen

$$\begin{array}{ccccccclc} & & & 01 & & & & \longleftarrow & \cancel{0}1 = 101^0 \\ & & 01 & & 01 & & & \longleftarrow & \cancel{0}101 = 101^1 \\ & 01 & & 02 & & 01 & & \longleftarrow & \cancel{0}10201 = 101^2 \\ 01 & & 03 & & 03 & & 01 & \leftarrow & \cancel{0}1030301 = 101^3 \end{array}$$

Zu Blatt 8, Aufg. 4

a.) Um im 9. Wurf die Kombination 3 x Kopf, 2 x Zahl, 4 x Wappen zu erhalten, muss im 8. Wurf entweder: **2** x K, 2 x Z, 4 x W

oder: 3 x K, **1** x Z, 4 x W

oder: 3 x K, 2 x Z, **3** x W

gefallen sein!

→ Die Anzahl der Kombination für 3 x K, 2 x Z, 4 x W im 9. Wurf ergibt sich also aus:

der Anzahl der Kombinationen für **2** x K, 2 x Z, 4 x W (im 8. Wurf)

\+ der Anzahl der Kombinationen für 3 x K, **1** x Z, 4 x W (im 8. Wurf)

\+ der Anzahl der Kombinationen für 3 x K, 2 x Z, **3** x W (im 8. Wurf).

Kurz: $a(3,2,4) = a(\mathbf{2},2,4) + a(3,\mathbf{1},4) + a(3,2,\mathbf{3})$

Anzahl der Kombinationen für 3 x K, 2 x Z, 4 x W — Anz. der Kombi. für 2 x K, 2 x Z, 4 x W — Anz. der Kombi. für 3 x K, 1 x Z, 4 x W — Anz. der Kombi. für 3 x K, 2 x Z, 3 x W

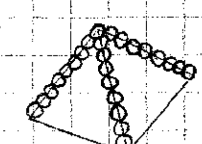
b.) Es gilt offensichtlich die Rekursionsgleichung:

$$a(k,z,w) = a(k-1,z,w) + a(k,z-1,w) + a(k,z,w-1) \quad !$$

c.) Startwerte: $a(\mathbf{k},0,0) = 1$, $a(0,\mathbf{z},0) = 1$, $a(0,0,\mathbf{w}) = 1$

[nur eine Komponente ist $\neq 0$]

Anz. der Kombi. für immer Kopf (also für k x Kopf, 0 x Zahl, 0 x Wappen) — Anz. der Kombi. für immer Zahl — Anz. der Kombi. für immer Wappen

[Das sind die Werte auf den Seitenkanten des "Pascalschen Tetraeders" ]

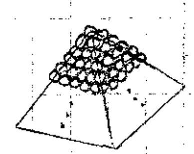
(Anz. der Kombi. für keinmal Wappen)

Randbeziehungen: $a(\mathbf{k},\mathbf{z},0) = a(k-1,z,0) + a(k,z-1,0)$

[genau eine Komponente ist $= 0$]

$$a(\mathbf{k},0,\mathbf{w}) = a(k-1,0,w) + a(k,0,w-1)$$

$$a(0,\mathbf{z},\mathbf{w}) = a(0,z-1,w) + a(0,z,w-1)$$

[Das sind insgesamt die Werte auf den Seitenflächen des "Pascalschen Tetraeders" ]

Fortsetzung zu Aufg. 4 c)

Kombinationszahlen beim Werfen mit **2** magischen Münzen:

$a(2,0,0) = 1$, $a(0,2,0) = 1$, $a(0,0,2) = 1$,

$a(1,1,0) = a(0,1,0) + a(1,0,0) = 1 + 1 = 2$,

$a(1,0,1) = a(0,0,1) + a(1,0,0) = 1 + 1 = 2$,

$a(0,1,1) = a(0,0,1) + a(0,1,0) = 1 + 1 = 2$

Insgesamt $\Rightarrow 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = \underline{\underline{9}}$ $(= 3^2)$ verschiedene Kombinationen für das Werfen mit 2 magischen Münzen gibt es !!!

Kombinationszahlen beim Werfen mit **3** magischen Münzen:

$a(3,0,0) = 1$, $a(0,3,0) = 1$, $a(0,0,3) = 1$,

$a(1,2,0) = a(0,2,0) + a(1,1,0) = 1 + \underset{\uparrow (s.o.)}{2} = 3$

$a(1,0,2) = a(0,0,2) + a(1,0,1) = 1 + 2 = 3$

$a(0,1,2) = a(0,0,2) + a(0,1,1) = 1 + 2 = 3$

$a(0,2,1) = a(0,2,0) + a(0,1,1) = 1 + 2 = 3$

$a(2,1,0) = a(2,0,0) + a(1,1,0) = 1 + 2 = 3$

$a(2,0,1) = a(2,0,0) + a(1,0,1) = 1 + 2 = 3$

$a(1,1,1) = a(0,1,1) + a(1,0,1) + a(1,1,0) = 2 + 2 + 2 = 6$

Insgesamt $\Rightarrow 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6 = \underline{\underline{27}}$ $(= 3^3)$ verschiedene Kombinationen für das Werfen mit 3 magischen Münzen gibt es !!!

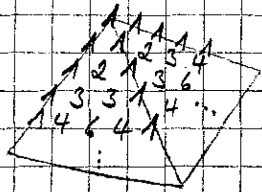
Zu Blatt 8, Aufg. 4

d) Im Fall des "magischen Münzwurfes", also im Fall der drei Ergebnismöglichkeiten, kann man alle Zahlen systematisch im "Pascalschen Tetraeder" aufschreiben.

(eine Dimension mehr)

außen (Rand):

(siehe 3.)



Startwerte sind 1: $a(k,0,0) = a(0,z,0)$
(Seitenkanten) $= a(0,0,w) = 1$
und alle übrigen Randwerte lassen sich (wie im Pascalschen Dreieck) aus den beiden darüberliegenden Vorgängerwerten berechnen,

d.h. für die Seitenflächen gilt:

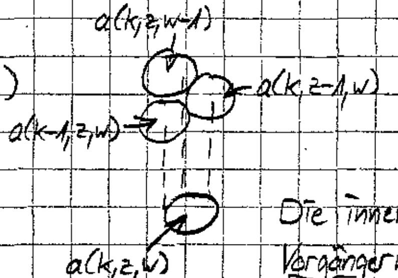
$a(k,z,0) = a(k-1,z,0) + a(k,z-1,0)$

$a(k,0,w) = a(k-1,0,w) + a(k,0,w-1)$

$a(0,z,w) = a(0,z-1,w) + a(0,z,w-1)$.

Innen:

(siehe 2.)



!!!

Die inneren Werte lassen sich aus den 3 darüberliegenden Vorgängerwerten berechnen, d.h. für die inneren Werte gilt:

$a(k,z,w) = a(k-1,z,w) + a(k,z-1,w) + a(k,z,w-1)$.

Ansicht von oben ("Draufsicht"):

(0. Schicht: 1)

1. Schicht

1
1 1

$1+1+1 = 3$ $(= 3^1)$

2. Schicht

1
2 2
1 2 1

$1+1+1+2+2+2 = 9$ $(= 3^2)$

3. Schicht

1
3 3
3 6 3
1 3 3 1

$1+1+1+3+3+3+3+3+3$
$+3+6 = 27$ $(= 3^3)$

4. Schicht

1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1

$3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6$
$+ 3 \cdot 12 = 81$ $(= 3^4)$

5. Schicht

1
5 5
10 20 10
10 30 30 10
5 20 30 20 5
1 5 10 10 5 1

$3 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 10$
$+ 3 \cdot 20 + 3 \cdot 30$
$= 243$ $(= 3^5)$

Es gilt:

Die Zahlen der n-ten Schicht zusammenaddiert ergeben die Zahl der möglichen Kombinationen für den Wurf mit n Münzen (bzw. für den n-ten Münzwurf) !