(20 : 6 = 3 Rest 2)   (110 : 66 = 1 Rest 44)

Blatt 7

ganzzahliger Anteil von 20 : 6   ganzzahliger Anteil von 110 : 66

g. A. v. 4390 : 662

1.) $\sqrt{11} \overset{\boxed{9}}{=} 3{,}3166$ ← g. A. v. 41440 : 6632   also $\sqrt{11} \approx 3{,}317$

9 ← größte Quadratzahl < 11

11 − 9 mit 2 Nullen → $200 : 6$ ← doppeltes bisheriges Ergebnis also $2 \cdot 3$

größtes Vielfaches von 6, das < 20 ist (·10) → 189 ← +Quadrat der zuletzt zum Ergebnis hinzugefügten Zahl also 3^2 $3 \cdot 6 \overset{\cdot 10}{} + 3^2 = 180 + 9 = 189$

200 − 189 mit 2 Nullen → $1100 : 66$ ← doppeltes bisheriges Ergebnis also $2 \cdot 33$

größtes Vielfaches von 66, das < 110 ist (·10) → 661 ← +Quadrat der zuletzt zum Ergebnis hinzugefügten Zahl also 1^2 $1 \cdot 66 \cdot 10 + 1^2 = 660 + 1 = 661$

1100 − 661 mit 2 Nullen → $43900 : 662$ ← doppeltes bisheriges Ergebnis also $2 \cdot 331$

größtes Vielfaches von 662, das < 4390 ist (·10) → 39756 ← + Quadrat der zuletzt zum Ergebnis hinzugefügten Zahl also 6^2 $6 \cdot 662 \cdot 10 + 6^2$ $39720 + 36 = 39756$

43900 − 39756 mit 2 Nullen → $414400 : 6632$ ← doppeltes bisheriges Ergebnis also $2 \cdot 3316$

größtes Vielfaches von 6632, das 41440 ist (·10) → 397956 ← + Quadrat der zuletzt zum Ergebnis hinzugefügten Zahl als 6^2

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{w}{x_n}\right)$ "Heronverf."

2.) Beisp $\overset{\sqrt{w}}{\downarrow}$ $\sqrt{39}$ $\overset{x_0}{\downarrow}$ $x_0 = 6$ $x_1 = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{39}{6}\right) = 6\frac{3}{12} \approx \sqrt{39}$

$\sqrt{54}$ $x_0 = 7$ $x_1 = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{54}{7}\right) = 7\frac{5}{14} \approx \sqrt{54}$

$\sqrt{62}$ $x_0 = 8$ $x_1 = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{62}{8}\right) = 7\frac{14}{16} = 8 - \frac{2}{16} \approx \sqrt{62}$

Rezept: $\sqrt{w}$ $w \in \mathbb{N}$

a) Suche $\underset{\in \mathbb{N}}{n}$ mit $|w - n^2|$ minimal

b) $\sqrt{w} \approx n + \frac{w - n^2}{2n}$

$$\left(\sqrt{w} \overset{\text{Heronverf.}}{\approx} \frac{1}{2}\left(n + \frac{w}{n}\right) = \frac{n}{2} + \frac{w}{2n} = \frac{n^2}{2n} + \frac{w}{2n} = \frac{n^2 + w}{2n} = \frac{2n^2 + w - n^2}{2n} = n + \frac{w - n^2}{2n}\right)$$

Begründung

$$n + \frac{w - n^2}{2n} = \frac{2n^2 + w - n^2}{2n} = \frac{n^2 + w}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{w}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(n + \frac{w}{n}\right)$$

Das ist ein Schritt mit dem Heron-Verfahren mit dem Startwert n.

Bsp.: $\sqrt{39} \approx 6 + \frac{39 - 36}{12} = 6\frac{3}{12}$ ✓

$\sqrt{54} \approx 7 + \frac{54 - 49}{14} = 7\frac{5}{14}$ ✓

$\sqrt{62} \approx 8 + \frac{62 - 64}{16} = 8 - \frac{2}{16} = 7\frac{14}{16}$ ✓

Beispiel zu Aufg. 1:

$\sqrt{7} = 2,\overset{6}{\cancel{7}}457$ $\quad$ $\sqrt{4}$

Probe: $\sqrt{7} \approx 2,6457513$

$-4 \leftarrow$ größte Quadratzahl < 7

$30'0 : 4 \leftarrow 2 \cdot 2 \leftarrow$ doppeltes bisheriges Ergebnisses

$\Big($ $7 \cdot 4 \rightarrow 28$

$49 \leftarrow 7^2$

$-329 > 300$ ↯ $\Big)$

$6 \cdot 4 \rightarrow 24 \leftarrow$ nach 28 das nächstgrößere Vielfache von 4, das < 30 ist

$36 \leftarrow 6^2 \leftarrow$ Quadrat der zuletzt zum Ergebnis hinzugefügten Zahl

$-276 \leftarrow 240 + 36$

$240'0 : 52 \leftarrow 2 \cdot 26 \leftarrow$ doppeltes bisheriges Ergebnis

$4 \cdot 52 \rightarrow 208 \leftarrow$ größtes Vielfaches von 52, das < 240 ist

$16 \leftarrow 4^2 \leftarrow$ Quadrat der zuletzt zum Ergebnis hinzugefügten Zahl

$-2096 \leftarrow 2080 + 16$

$3040'0 : 528 \leftarrow 2 \cdot 264$

$5 \cdot 528 \rightarrow 2640$

$25 \leftarrow 5^2$

$-26425 \leftarrow 26400 + 25$

$39750'0 : 5290 \leftarrow 2 \cdot 2645$

$7 \cdot 5290 \rightarrow 37030$

$49 \leftarrow 7^2$

$-370349 \leftarrow 370300 + 49$

$271510'0 : 52914 \leftarrow 2 \cdot 26457$

u.s.w.

* berechne ich & füge ich zum Ergebnis hinzu!

** Lässt sich per Induktion beweisen

Zusammenhang mit 1. binomischer Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$\sqrt{7} = 2,6(\overset{a}{4})$

4

$30'0 : 4$

276

$240'0 : 52 \leftarrow 2 \cdot 26$

$26 \cdot 10 \cdot \overset{a}{4} + \overset{a}{4}^2 \rightarrow 2096$

$\big(3040'0 : 528$ u.s.w. $\big)$

An dieser Stelle (also wenn man 2,6 schon berechnet hat) ist ein a gesucht, so dass:

$$(26 \cdot 10 + a)^2 \leq 7 \cdot 100^2$$

$$\Leftrightarrow 26^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot a + a^2 \leq 7 \cdot 100^2 \quad \Big| -26^2 \cdot 10^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot a + a^2}_{\text{Ist genau das, was ich tue, d.h. genau so ein a *}} \leq \underbrace{7 \cdot 100^2 - 26^2 \cdot 10^2}_{2400 \text{ ist immer der Rest!}} \; {}^{**}$$

[redacted] **Blatt 7 Aufg. 3**

a) NS – Berechnung:

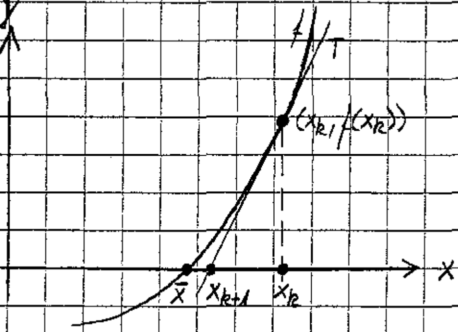
$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 7 = 0 \quad |+7$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 = 7 \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{7} \approx 1.9129312$$

b) Beschreibung des Newton-Verfahrens (auch "Tangenten-Verf." genannt):



Sei x_k eine Näherung für die Nullstelle $\bar{x}$ von f

Approximation von f durch die Tangente an f durch den Punkt $(x_k, f(x_k))$:

$$\Rightarrow f(x) \approx \overset{\text{(Tangentengleichung)}}{\underset{(f(x_k)\text{ nach oben})}{f(x_k)} + \underset{\text{(Steigung der Tangente)}}{f'(x_k)}(x - \underset{(x_k\text{ nach rechts})}{x_k})} =: T(x) \quad \text{(Tangente)}$$

Bestimmung der Nullstelle x_{k+1} der Tangente $T(x)$ als Approximation der Nullstelle $\bar{x}$ von f:

$$T(x_{k+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \quad |-f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k) \quad |:f'(x_k)$$

Voraussetzung: $f'(x_k) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad |+x_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Newton-Iteration!

D.h. die **Newton-Funktion** lautet: $n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$!!!

Hier: $f(x) = x^3 - 7$, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \underline{n(x)} = x - \frac{x^3 - 7}{3x^2} = x - \frac{1}{3}x + \frac{7}{3x^2}$

$= \frac{2}{3}x + \frac{7}{3x^2}$ für $x \neq 0$!!!

c) $n(2) = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{7}{3 \cdot 2^2} = \frac{4}{3} + \frac{7}{12} = \frac{16}{12} + \frac{7}{12} = \underline{\underline{\frac{23}{12}}}$

Abweichung: $\left| 1{,}91 - \frac{23}{12} \right| = 0{,}00\overline{6} = 0{,}\overline{6} \cdot 10^{-2}$ $\quad \left(\left| \sqrt[3]{7} - \frac{23}{12} \right| \approx 0{,}0037354 \right)$

d) $f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 7 = \underline{8{,}625}$

$n(2{,}5) = \frac{2}{3} \cdot 2{,}5 + \frac{7}{3 \cdot 2{,}5^2} = \underline{2{,}04}$

e)

$h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x^2}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2x^2}$

$x = h(x) \leftarrow$ "Fixpunktberechnung"

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2x^2} \quad \Big| -\frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{7}{2x^2} \quad \Big| \cdot 2x^2$

$\Leftrightarrow x^3 = 7 \quad \Big| \sqrt[3]{}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \sqrt[3]{7}}}$

f) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\underline{x_0 = y_0 = 3} \leftarrow$ Startwerte

$x_{n+1} = n(x_n) \leftarrow$ "Newtoniteration" , $y_{n+1} = h(y_n) \leftarrow$ "Fixpunktiteration"

$\underline{x_1} = n(x_0) = n(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{7}{3 \cdot 3^2} = 2 + \frac{7}{27} = \frac{108}{54} + \frac{14}{54} = \frac{122}{54} = \underline{\frac{61}{27}}$

$\underline{\approx 2.2592593}$

$\underline{x_2} = n(x_1) = n\left(\frac{61}{27}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{61}{27} + \frac{7}{3 \cdot \left(\frac{61}{27}\right)^2} = \frac{122}{81} + \frac{7}{\frac{3721}{243}} = \underline{\frac{122}{81} + \frac{1701}{3721}}$

$\underline{= 1.963308}$

$\underline{x_3} = n(x_2) = n(1.963308) = \frac{2}{3} \cdot 1.963308 + \frac{7}{3 \cdot (1.963308)^2} \underline{\approx 1.9142128}$

$\underline{x_4} = n(x_3) \approx n(1.9142128) = \frac{2}{3} \cdot 1.9142128 + \frac{7}{3 \cdot (1.9142128)^2} \underline{= 1.912932}$

$\underline{y_1} = h(y_0) = h(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{2 \cdot 3^2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{18} = \frac{27}{18} + \frac{7}{18} = \frac{34}{18} = \underline{\frac{17}{9}} = \underline{1.\overline{8}}$

$\underline{y_2} = h(y_1) = h\left(\frac{17}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{9} + \frac{7}{2 \cdot \left(\frac{17}{9}\right)^2} = \frac{17}{18} + \frac{7}{\frac{578}{81}} = \underline{\frac{17}{18} + \frac{567}{578}} \underline{\approx 1.9254133}$

$\underline{y_3} = h(y_2) \approx h(1.9254133) = \frac{1}{2} \cdot 1.9254133 + \frac{7}{2 \cdot (1.9254133)^2} \underline{\approx 1.9068112}$

$\underline{y_4} = h(y_3) \approx h(1.9068112) = \frac{1}{2} \cdot 1.9068112 + \frac{7}{2 \cdot (1.9068112)^2} \underline{\approx 1.9160206}$

Vergleich der ersten 4 Folgenglieder & Beurteilung der Konvergenzgeschwindigkeit:

exakter Wert: $\sqrt[3]{7} \approx 1.9129312$ $(x_0 = y_0 = 3)$

$n(x)$	**$h(y)$**
$x_1 = n(x_0) \approx 2.2592593$	$y_1 = h(y_0) = 1.\overline{8}$
$x_2 = n(x_1) = 1.963308$	$y_2 = h(y_1) \approx 1.9254133$
$x_3 = n(x_2) \approx 1.9142128$	$y_3 = h(y_2) \approx 1.9068112$
$x_4 = n(x_3) \approx 1.912932$	$y_4 = h(y_3) \approx 1.9160206$

1.) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert offensichtlich **schneller** gegen die Nullstelle $\sqrt[3]{7}$ als die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

2.) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert offensichtlich **von oben** gegen $\sqrt[3]{7}$ & die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert offensichtlich **alternierend** gegen $\sqrt[3]{7}$.

Zu Blatt 7, Aufgabe 3)

"Newton-Verfahren"

$$x_{n+1} = n(x_n) = \frac{2}{3} x_n + \frac{7}{x_n^2}$$

anderes Verfahren (ist streng genommen nicht das "Heron-Verfahren"!)

$$y_{n+1} = h(y_n) = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{7}{y_n^2}\right)$$

(Das Heron-Verf. ist ursprünglich nur für Quadratwurzeln kann aber auf k-te Wurzeln mit k>2 verallgemeinert werden & ist ein Spezialfall des Newtonverfahrens, d.h. es entspricht dem Newtonverf. im Falle der Wurzelberechnung, aber d Newtonverf. ist [illegible] weil man damit ganz allgemein Nullstellen bestimmen kan & nicht nur Wurzeln!)

zum Vergleich:

$$\sqrt[3]{7} \approx \underline{\underline{1{,}9129311828}}$$

n	x_n	y_n
0	3,0000000000	3,0000000000
1	2,2592592593	1,8888888889
2	1,9633080182	1,9254133026
3	1,9142127542	1,9068112397
4	1,9129320406	1,9160206489
5	1,9129311828	1,9113939180
6	1,9129311828	1,9137016702
7	1,9129311828	1,9125464043
8	1,9129311828	1,9131236881
9	1,9129311828	1,9128349592
10	1,9129311828	1,9129793018
11	1,9129311828	1,9129071251
12	1,9129311828	1,9129432121
13	1,9129311828	1,9129251682
14	1,9129311828	1,9129341901
15	1,9129311828	1,9129296791
16	1,9129311828	1,9129319346
17	1,9129311828	1,9129308069
18	1,9129311828	1,9129313707
19	1,9129311828	1,9129310888
20	1,9129311828	1,9129312298
21	1,9129311828	1,9129311593
22	1,9129311828	1,9129311945
23	1,9129311828	1,9129311769
24	1,9129311828	1,9129311857
25	1,9129311828	1,9129311813
26	1,9129311828	1,9129311835
27	1,9129311828	1,9129311824
28	1,9129311828	1,9129311830
29	1,9129311828	1,9129311827
30	1,9129311828	1,9129311828
31	1,9129311828	1,9129311827
32	1,9129311828	1,9129311828
33	1,9129311828	1,9129311828
34	1,9129311828	1,9129311828
35	1,9129311828	1,9129311828
36	1,9129311828	1,9129311828
37	1,9129311828	1,9129311828
38	1,9129311828	1,9129311828
39	1,9129311828	1,9129311828
40	1,9129311828	1,9129311828

Wie man sieht konvergiert die Folge der x_n wesentlich schneller als die Folge der y_n, d.h. das "Newton-Verfahren" konvergiert wesentlich scheller als das andere Verfahren!!! ...