Blatt 5

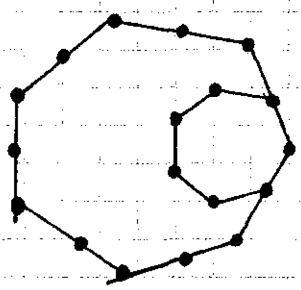
Aufg. 1 a)

[redacted] Zuerst zeichet man einen Punkt • $P_7(1) = 1$

Dann zeichnet man ausgehend von diesem Punkt ein 7-Eck, wobei der Punkt auf der am weitesten rechts liegenden Ecke des 7-Ecks liegt.
Auf alle anderen Ecken des 7-Ecks zeichnet man ebenfalls je einen Punkt.

$P_7(2) = 7$

Schließlich verlängert man die beiden rechts liegenden Seiten des 7-Ecks auf die doppelte Länge & [redacted] zeichnet damit um das kleine 7-Eck ein großes 7-Eck. Es kommt nun zum einen auf jede Ecke des großen 7-Ecks ein Punkt, und zum anderen kommt auf die Mitte jeder Seite des großen 7-Ecks ein Punkt.

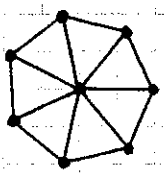


$P_7(3) = 18$

Aufg. 2 a)

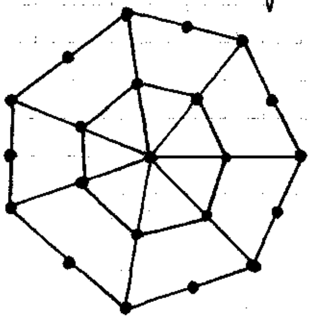
Zuerst zeichnet man einen Punkt • $N_7(1) = 1$

Dann zeichnet man um den Punkt ein 7-Eck, so dass der Punkt in der Mitte des 7-Ecks liegt, also jeder Eckpunkt den gleichen Abstand von diesem Punkt hat.
Auf alle Ecken des 7-Ecks zeichnet man nun je einen Punkt.



$N_7(2) = 8$

Schließlich zeichnet man um das 7-Eck ein weiteres 7-Eck, dessen Ecken von [redacted] den Ecken des alten 7-Ecks doppelt so weit entfernt sind, wie diese zum Punkt in der Mitte. Es kommt nun zum Einen auf jede Ecke des großen 7-Ecks ein Punkt, und zum anderen kommt auf die Mitte jeder Seite des großen 7-Ecks ein Punkt.



$N_7(3) = 22$

Aufg. 1 b)

$r = 3$:

$P_3(1) = 1$
$P_3(2) = 3 = P_3(1) + 2$
$P_3(3) = 6 = P_3(2) + 3$
$P_3(4) = 10 = P_3(3) + 4$
$P_3(5) = 15 = P_3(4) + 5$
$P_3(6) = 21 = P_3(5) + 6$
$\dots$

$\Downarrow$

$P_3(n+1) = P_3(n) + n + 1$

$r = 4$:

$P_4(1) = 1$
$P_4(2) = 4 = P_4(1) + 3$
$P_4(3) = 9 = P_4(2) + 5$
$P_4(4) = 16 = P_4(3) + 7$
$P_4(5) = 25 = P_4(4) + 9$
$P_4(6) = 36 = P_4(5) + 11$
$\dots$

$\Downarrow$

(zu $n+1$ nächstgrößere ungerade Zahl)

$P_4(n+1) = P_4(n) + 2n + 1$

$r = 5$:

$P_5(1) = 1$
$P_5(2) = 5 = P_5(1) + 4 \leftarrow (3\cdot 1+1)$
$P_5(3) = 12 = P_5(2) + 7 \leftarrow (3\cdot 2+1)$
$P_5(4) = 22 = P_5(3) + 10 \leftarrow (3\cdot 3+1)$
$P_5(5) = 35 = P_5(4) + 13 \leftarrow (3\cdot 4+1)$
$P_5(6) = 51 = P_5(5) + 16 \leftarrow (3\cdot 5+1)$
$\dots$

$\Downarrow$

$P_5(n+1) = P_5(n) + 3n + 1$

$r = 6$:

$P_6(1) = 1$
$P_6(2) = 6 = P_6(1) + 5 \leftarrow (4\cdot 1+1)$
$P_6(3) = 15 = P_6(2) + 9 \leftarrow (4\cdot 2+1)$
$P_6(4) = 28 = P_6(3) + 13 \leftarrow (4\cdot 3+1)$
$P_6(5) = 45 = P_6(4) + 17 \leftarrow (4\cdot 4+1)$
$P_6(6) = 66 = P_6(5) + 21 \leftarrow (4\cdot 5+1)$
$\dots$

$\Downarrow$

$P_6(n+1) = P_6(n) + 4n + 1$

$\Rightarrow$ **allgemeine rekursive Formel:**

$$P_r(n+1) = \overset{P_r(n) \,+\, rn - 2n + 1}{P_r(n) + (r-2)n + 1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}_{\geq 3},$$

$$P_r(1) = 1 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}_{\geq 3}$$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{r = 7:} \\ P_7(1) = 1 \\ P_7(2) = 7 \\ P_7(3) = 18 \\ P_7(4) = 34 \\ P_7(5) = 55 \\ P_7(6) = 81 \end{array}\right)$$

Aufg. 1c)

$$P_r(1) = 1$$

$$P_r(2) = P_r(1) + (r-2)\cdot 1 + 1 = 1 + (r-2) + 1 = \overset{1}{r}$$

$$P_r(3) = P_r(2) + (r-2)\cdot 2 + 1 = r + 2r - 4 + 1 = \overset{1+2}{3}r - \overset{1\cdot 3}{3}$$

$$P_r(4) = P_r(3) + (r-2)\cdot 3 + 1 = 3r - 3 + 3r - 6 + 1 = \overset{1+2+3}{6}r - \overset{2\cdot 4}{8}$$

$$P_r(5) = P_r(4) + (r-2)\cdot 4 + 1 = 6r - 8 + 4r - 8 + 1 = \overset{1+2+3+4}{10}r - \overset{3\cdot 5}{15}$$

$$P_r(6) = P_r(5) + (r-2)\cdot 5 + 1 = 10r - 15 + 5r - 10 + 1 = \overset{1+2+3+4+5}{15}r - \overset{4\cdot 6}{24}$$

$$\ldots$$

$\Rightarrow$ allgemeine explizite Formel:

$$P_r(n) = (1+2+3+\ldots+n-1)\cdot r - (n-2)\cdot n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)\cdot r - n(n-2)$$

$$= \frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot r - n(n-2) \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{N}_{\geq 3}$$

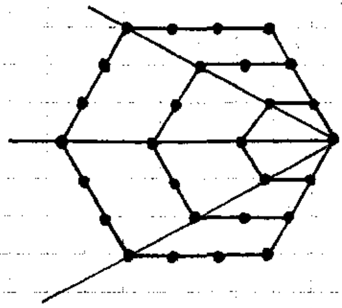
Summenformel
(siehe Blatt 1)

$$\left(\begin{array}{l} \text{bzw.:} \\ P_r(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}\cdot r - \underbrace{(n+1)(n-1)}_{n^2-1} \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}_0,\ r\in\mathbb{N}_{\geq 3} \end{array}\right)$$

Aufg. 1c) anders: (mit dem Tip: Zerlegung der Figuren in Dreiecke & Anwendung der expliziten Formel für Dreieckszahlen)

$$P_3(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$ (explizite Formel für die Dreieckszahlen aus der VL)

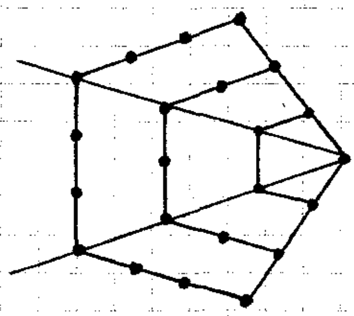
Zerlegung des 6-Ecks in Dreiecke:



$\Rightarrow$ 4 Dreiecke, 3 Seiten doppelt (mit je n Punkten)

$$\Rightarrow P_6(n) = \underset{6-2}{\underset{\uparrow}{4}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \underset{6-3}{\underset{\uparrow}{3}}n$$

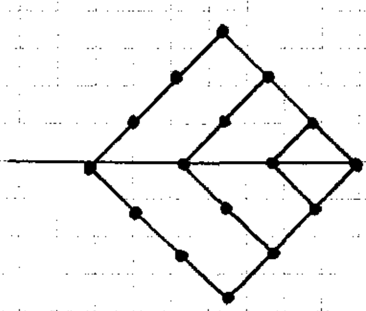
Zerlegung des 5-Ecks in Dreiecke:



$\Rightarrow$ 3 Dreiecke, 2 Seiten doppelt (mit je n Punkten)

$$\Rightarrow P_5(n) = \underset{5-2}{\underset{\uparrow}{3}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \underset{5-3}{\underset{\uparrow}{2}}n$$

Zerlegung des 4-Ecks in Dreiecke:



$\Rightarrow$ 2 Dreiecke, 1 Seite doppelt (mit je n Punkten)

$$\Rightarrow P_4(n) = \underset{4-2}{\underset{\uparrow}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \underset{4-3}{\underset{\uparrow}{1}}n$$

$\Rightarrow$ allgemeine explizite Formel: $P_r(n) = (r-2) \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - (r-3) \cdot n$

$$\left(\begin{aligned} &= \frac{rn^2 + rn - 2n^2 - 2n}{2} - rn + 3n \\ &= \frac{rn^2 + rn - 2rn}{2} - n^2 - n + 3n \\ &= \frac{rn^2 - rn}{2} - n^2 + 2n \\ &= r \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n(n-2) \end{aligned} \right)$$

Aufg. 1 d)

Die gesuchte Zahl ist die 15.

$P_3(5) = 15 = P_6(3)$ $(15 > 1)$

$3 \neq 6$ $5 \neq 3$, $5, 3 \geq 3$

15 ist die kleinstmögliche Zahl, denn $P_7(3) = 18 > 15$ ist schon zu groß,
d.h. man braucht sich nur $P_3(n)$ bis $P_6(n)$ anzusehen! ← Bis zu dem n, ab dem jeweils 15 überschritten wird!!!
Die Werte für $P_3(n), \ldots, P_6(n)$ habe ich bereits in Aufg. 1 a) aufgelistet!

Aufg. 2b)

r = 3:

$N_3(1) = 1$
$N_3(2) = 4 = N_3(1) + 3 \leftarrow (3 \cdot 1)$
$N_3(3) = 10 = N_3(2) + 6 \leftarrow (3 \cdot 2)$
$N_3(4) = 19 = N_3(3) + 9 \leftarrow (3 \cdot 3)$
$N_3(5) = 31 = N_3(4) + 12 \leftarrow (3 \cdot 4)$
$N_3(6) = 46 = N_3(5) + 15 \leftarrow (3 \cdot 5)$
...

$\Downarrow$

$N_3(n+1) = N_3(n) + 3n$

r = 4:

$N_4(1) = 1$
$N_4(2) = 5 = N_4(1) + 4$
$N_4(3) = 13 = N_4(2) + 8$
$N_4(4) = 25 = N_4(3) + 12$
$N_4(5) = 41 = N_4(4) + 16$
$N_4(6) = 61 = N_4(5) + 20$
...

$\Downarrow$

$N_4(n+1) = N_4(n) + 4n$

r = 5:

$N_5(1) = 1$
$N_5(2) = 6 = N_5(1) + 5$
$N_5(3) = 16 = N_5(2) + 10$
$N_5(4) = 31 = N_5(3) + 15$
$N_5(5) = 51 = N_5(4) + 20$
$N_5(6) = 76 = N_5(5) + 25$
...

$\Downarrow$

$N_5(n+1) = N_5(n) + 5n$

r = 6:

$N_6(1) = 1$
$N_6(2) = 7 = N_6(1) + 6$
$N_6(3) = 19 = N_6(2) + 12$
$N_6(4) = 37 = N_6(3) + 18$
$N_6(5) = 61 = N_6(4) + 24$
$N_6(6) = 91 = N_6(5) + 30$
...

$\Downarrow$

$N_6(n+1) = N_6(n) + 6n$

$\Rightarrow$ allgemeine rekursive Formel:

$N_r(n+1) = N_r(n) + r \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_{\geq 3}$,

$N_r(1) = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

(**r = 7:**

$N_7(1) = 1$ $\overset{7}{\curvearrowright}$
$N_7(2) = 8$ $\overset{14}{\curvearrowright}$
$N_7(3) = 22$ $\overset{21}{\curvearrowright}$
$N_7(4) = 43$ $\overset{28}{\curvearrowright}$
$N_7(5) = 71$ $\overset{35}{\curvearrowright}$
$N_7(6) = 106$)

Aufg. 2 c)

$$N_r(1) = 1$$

$$N_r(2) = N_r(1) + r \cdot 1 = 1 + \overset{1}{r}$$

$$N_r(3) = N_r(2) + r \cdot 2 = 1 + r + 2r = 1 + \overset{1+2}{3}r$$

$$N_r(4) = N_r(3) + r \cdot 3 = 1 + 3r + 3r = 1 + \overset{1+2+3}{6}r$$

$$N_r(5) = N_r(4) + r \cdot 4 = 1 + 6r + 4r = 1 + \overset{1+2+3+4}{10}r$$

$$N_r(6) = N_r(5) + r \cdot 5 = 1 + 10r + 5r = 1 + \overset{1+2+3+4+5}{15}r$$

...

$\Rightarrow$ allgemeine explizite Formel:

$$N_r(n) = 1 + (1+2+3+\ldots+n-1) \cdot r$$

$$= 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) \cdot r$$

$$= 1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot r \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}_{\geq 3}$$

Summenformel (siehe Blatt 1)

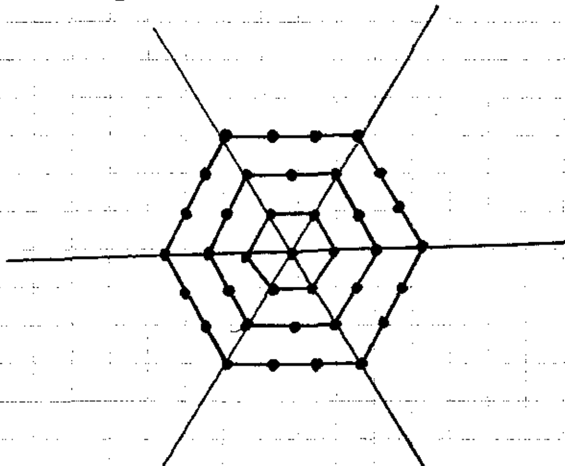
(bzw.:

$$N_r(n+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot r \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ r \in \mathbb{N}_{\geq 3}$$

)

Aufg. 2c) anders: (mit dem Tip)

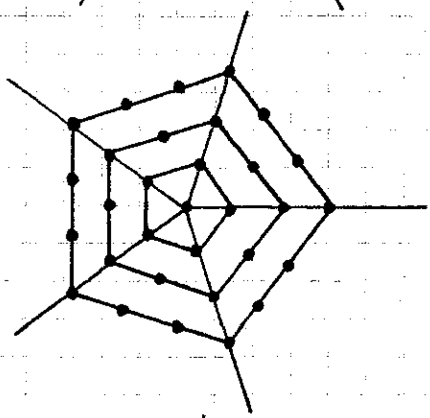
! $P_3(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$



$\Rightarrow$ 6 Dreiecke, 6 Seiten doppelt

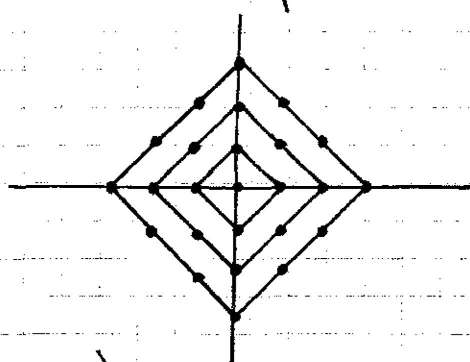
$\Rightarrow N_6(n) = 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 6n + 1$

Punkt in der Mitte



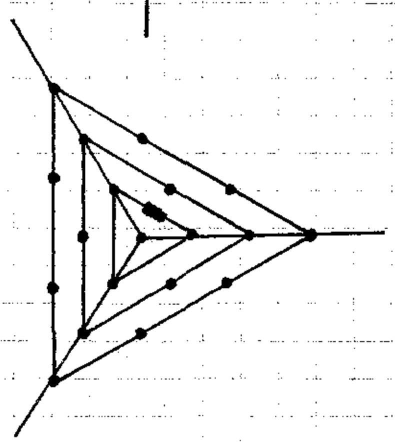
$\Rightarrow$ 5 Dreiecke, 5 Seiten doppelt

$\Rightarrow N_5(n) = 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 5n + 1$



$\Rightarrow$ 4 Dreiecke, 4 Seiten doppelt

$\Rightarrow N_4(n) = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 4n + 1$



$\Rightarrow$ 3 Dreiecke, 3 Seiten doppelt

$\Rightarrow N_3(n) = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n + 1$

$\Rightarrow$ allgemeine explizite Formel: $N_r(n) = r \cdot \frac{n(n+1)}{2} - rn + 1$

$$\left(\begin{aligned} &= \frac{rn^2 + rn}{2} - rn + 1 \\ &= \frac{rn^2 - rn}{2} + 1 = r \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 \end{aligned} \right)$$