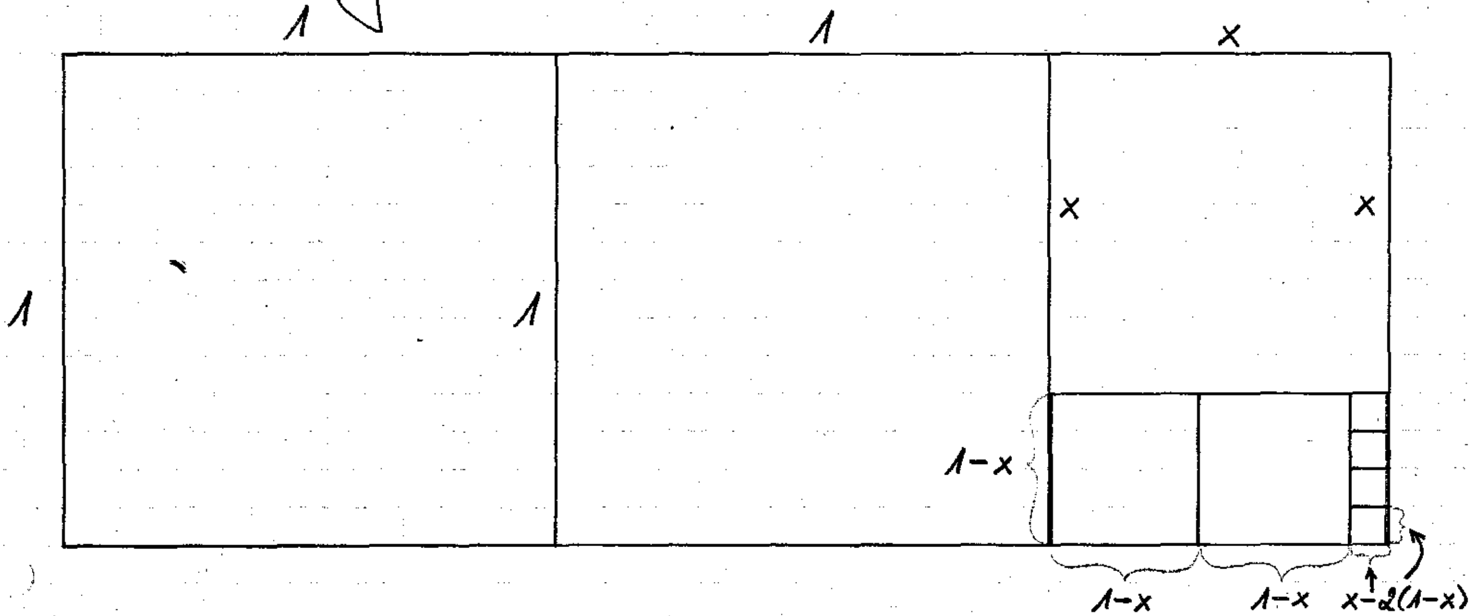
Zu Blatt 4

Aufg. 1

Rechteckdarstellung: Mit den 4 Rechtecken anfangen & "Einheiten-getreu" zeichnen (1 Einheit = 1 Kästchen) !!!



(Berechnung des Bruchs:

$$1-x = 4\cdot\big(x-2(1-x)\big)$$

$$\Leftrightarrow\ 1-x = 4x-8(1-x)$$

$$\Leftrightarrow\ 1-x = 4x-8+8x \quad \big|+x\ \big|+8$$

$$\Leftrightarrow\ 9 = 13x \quad \big|:13$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{9}{13} = x$$

$$\Rightarrow\ [2;1,2,4] = 2+\frac{9}{13} = 2\tfrac{9}{13} = \frac{35}{13} \quad (\approx 2{,}692307692307\ldots) \ (= 2{,}\overline{692307})$$)

! anders (mit "Kästchenzählen"):

Lange Seite: 17,5 cm $\hat{=}$ 35 Kästchen
Kurze Seite: 6,5 cm $\hat{=}$ 13 Kästchen

Bruch:

$$\frac{\text{Lange Seite}}{\text{Kurze Seite}} = \frac{35}{13} = 2{,}\overline{692307}$$

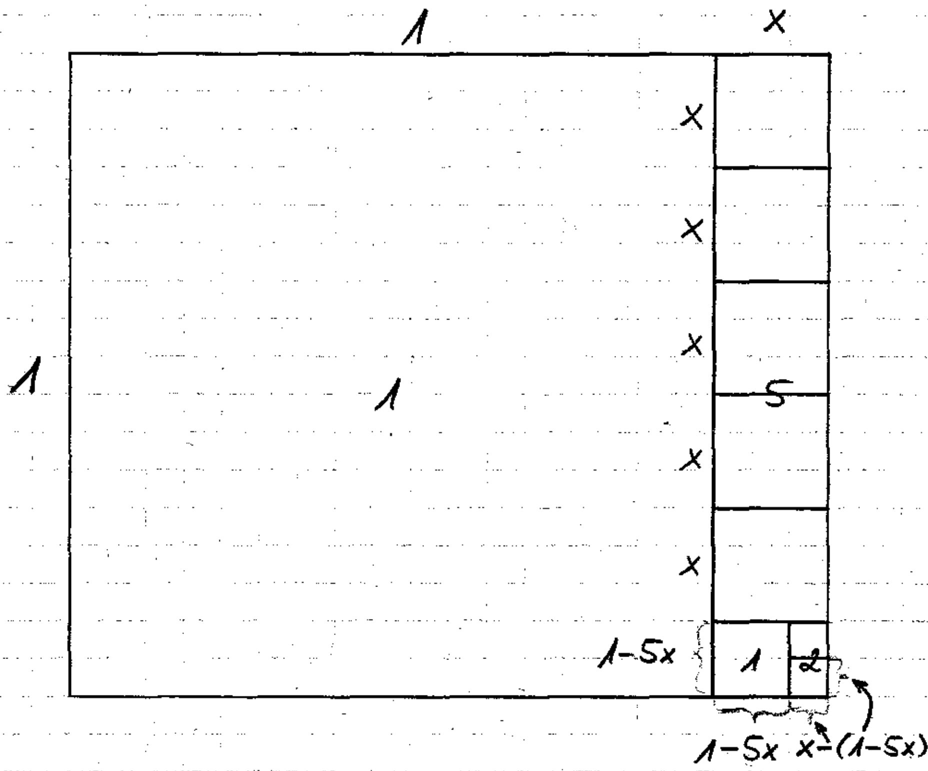
(Probe: !

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}} = 2{,}\overline{692307}$$ ✓)

Aufg. 2 (Man braucht hier die Kettenbrüche eigentlich nicht!)

1.) $\dfrac{20}{17} = 1 + \dfrac{3}{17} = 1 + \dfrac{1}{\frac{17}{3}} = 1 + \dfrac{1}{5+\frac{2}{3}} = 1 + \dfrac{1}{5+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \dfrac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

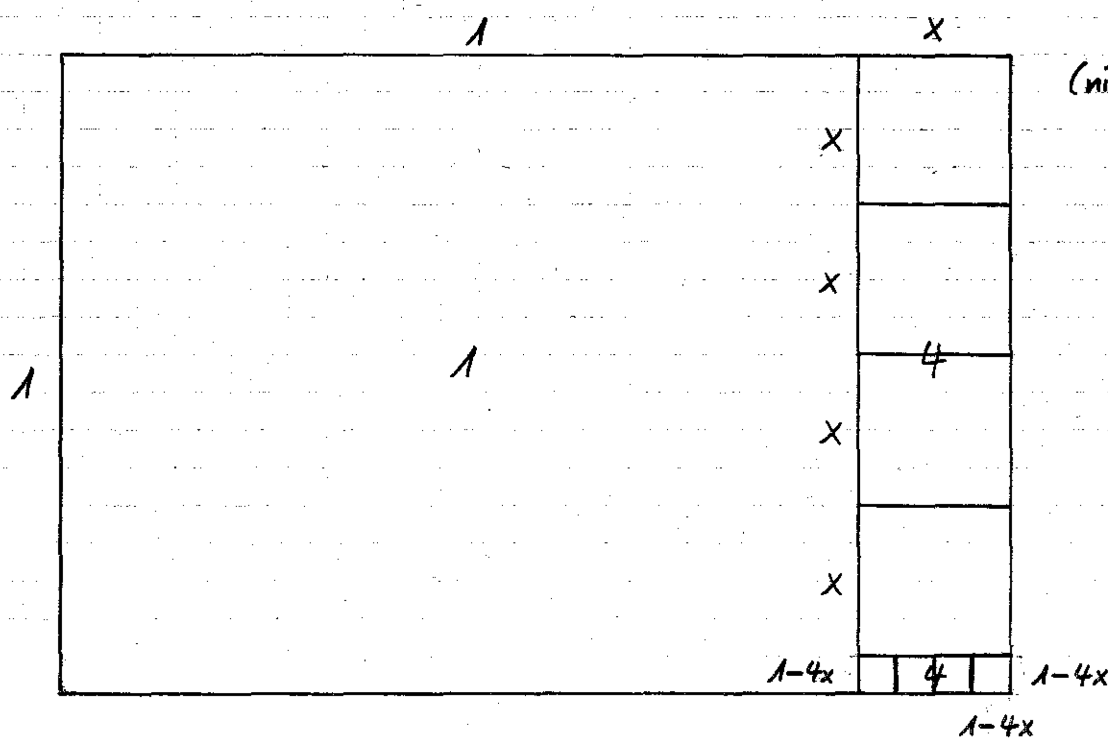
$\left(\dfrac{20}{17} = 1{,}\overline{1764705882352941}\right)$



2.) $\dfrac{21}{17} = 1 + \dfrac{4}{17} = 1 + \dfrac{1}{\frac{17}{4}} = 1 + \dfrac{1}{4+\frac{1}{4}}$

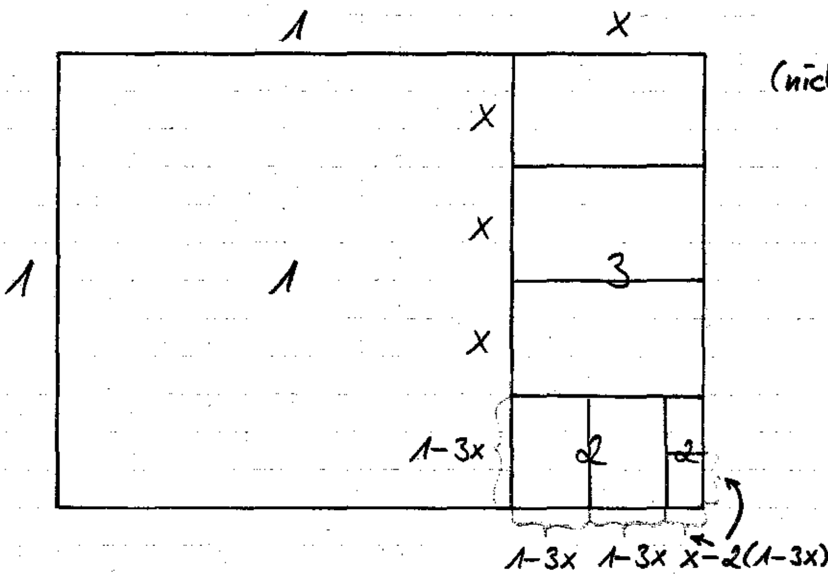
$\left(\dfrac{21}{17} = 1{,}\overline{2352941176470588}\right)$

(nicht "Einheiten-getreu")



3.) $\frac{22}{17} = 1 + \frac{5}{17} = 1 + \cfrac{1}{\frac{17}{5}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}} = \underline{\underline{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$

$\left(\frac{22}{17} = 1,\overline{2941176470588235} \right)$



(nicht "Einheiten-getreu")

Aufg. 3a) [redacted] ($\sqrt{3} \approx 1{,}73205$)

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3}-1)$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}$$

mit $\sqrt{3}+1$ erweitern!

$$= 1 + \frac{1}{\underbrace{\frac{\sqrt{3}+1 \leftarrow 2,\ldots}{2}}_{=1,\ldots}}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{2-2+\sqrt{3}+1}{2} = \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1} + \frac{\sqrt{3}+\overbrace{1-2}^{-1}}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}}$$

mit $\sqrt{3}+1$ erweitern

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\cancel{2}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}}}} \quad \frac{\cancel{2}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}} = 2+\sqrt{3}-1$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}$$ ← wie oben ⇒ ab hier beginnt die Periode!

Aufg. 3a (anderer Weg)

a) Es gilt: $\quad \underbrace{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}_{=3+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} = 2 \quad \Big| :(\sqrt{3}+1)$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}-1 = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \quad \Big| +1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}^{1} + \frac{\cancel{2}^{1}}{1+\sqrt{3}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{1+\sqrt{3}}}} = 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}^{1}+\frac{\cancel{2}^{1}}{1+\sqrt{3}}}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}}} = 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

Immer gleiches Schema der Ersetzung von $\sqrt{3}$, $\Rightarrow$ periodische Wdh. ...!

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{1+\sqrt{3}}}}}}$$

u.s.w.

$$= [1;\ 1 2 1 2 1 \ldots] = [1;\ \overline{12}]$$

Aufg. 3 b)

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} \quad \Big| -1 \Big| \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x}\right)$$

← bzw. $2+x-1$!

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x}{1+x} - 1 - \frac{1}{1+x} = 1 \quad \Big| +1 \Big| -x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{1+x} = 2 - x \quad \Big| \cdot (1+x)$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 + 2x - x - x^2 \quad \Big| + x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \quad \Big| + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

anders:

$$x = 1 + \frac{2}{1+x} \quad \Big| -1 \Big| \cdot (1+x)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(1+x) = 2$$

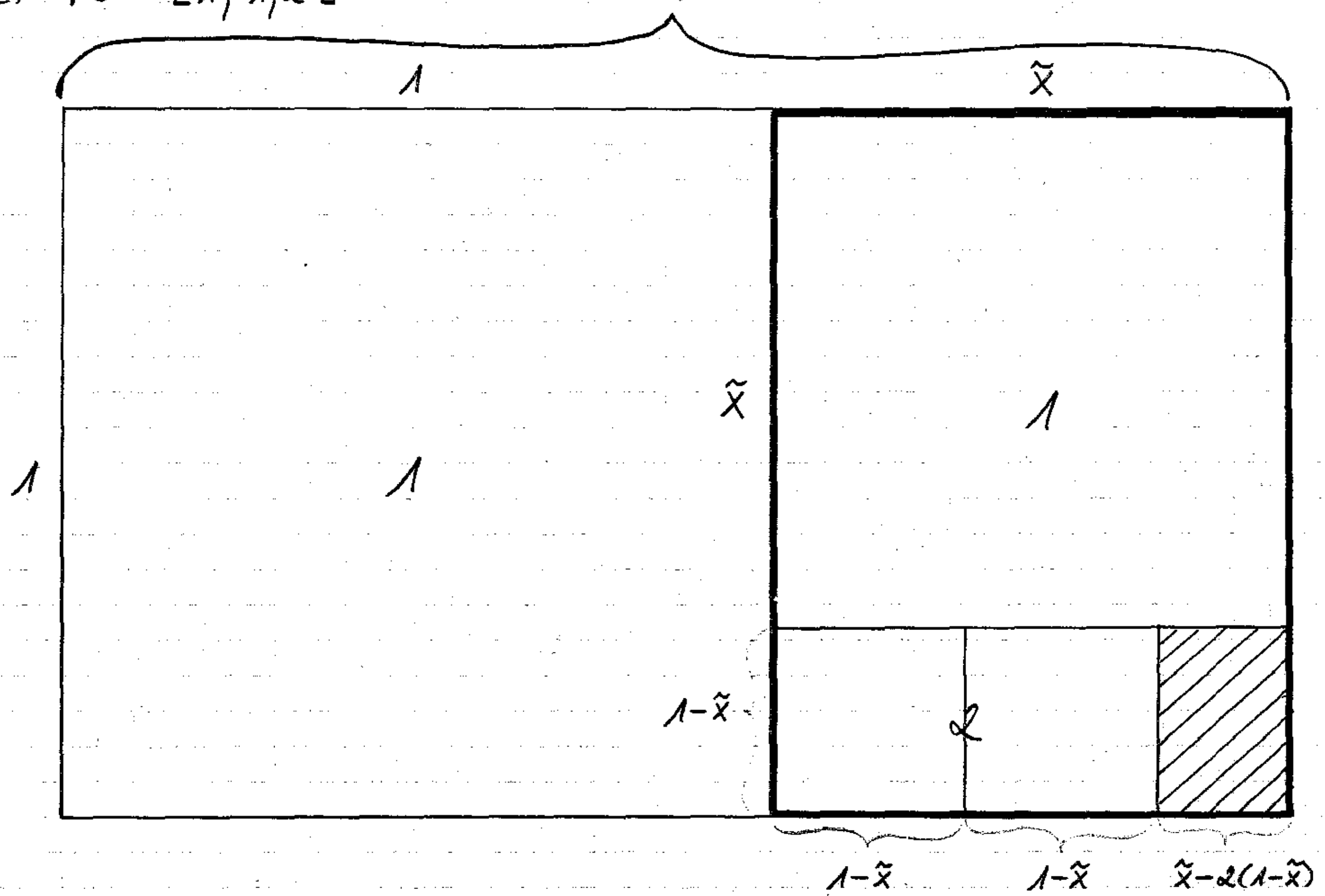
$$\Leftrightarrow x + x^2 - 1 - x = 2 \quad \Big| +1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Aufg. 3 (Fortsetzung)

c) $\sqrt{3} = [1; \overline{1,2}]$



Das rot-schraffierte & das blau-umrandete Rechteck sind ähnlich zueinander!

d) großes blau-umrandetes RE: kleines rot-schraffiertes RE:

$$\boxed{\tilde{x} = x-1}$$

lange Seite → / kurze Seite →

$$\frac{1}{\tilde{x}} = \frac{1-\tilde{x}}{\tilde{x}-2(1-\tilde{x})}$$

← lange Seite / ← kurze Seite

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tilde{x}} = \frac{1-\tilde{x}}{\underbrace{\tilde{x}-2+2\tilde{x}}_{3\tilde{x}-2}} \quad \Big| \cdot \tilde{x} \;\Big|\cdot (3\tilde{x}-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\tilde{x}-2 = \tilde{x}-\tilde{x}^2 \quad \big| +\tilde{x}^2-\tilde{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x}^2+2\tilde{x}-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x}^2+2\tilde{x}+1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (\tilde{x}+1)^2 = 3 \quad \big| \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x}+1 = +\sqrt{3}$$ ("$-\sqrt{3}$" fällt weg, da die Seitenlänge positiv sein muss!)

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{x} = \sqrt{3}-1}} \Rightarrow \underline{\underline{x = \tilde{x}+1 = \sqrt{3}}} \quad (\approx 1{,}73)$$

d) <u>anders:</u> ($x-1$ anstatt $\tilde{x}$)

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1-(x-1)}{\underbrace{x-1\underbrace{-2\underbrace{(1-(x-1))}_{=1-x+1=2-x}}_{=-4+2x}}_{=3x-5}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{x-1} = \frac{2-x}{3x-5}}$$ "Verhältnisgleichung"

$$\Leftrightarrow \quad 3x-5 = (2-x)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-5 = 2x-2-x^2+x \quad \big| +x^2-3x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-3 = 0 \quad \big| +3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \big| \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\sqrt{3}$$ ("$-\sqrt{3}$" fällt weg, da die Seitenlänge positiv sein muss!)