Zu Blatt 3

Aufg. 1

a) 150

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

$$150 = 128 + \underset{(150-128=22)}{16} + \underset{(22-16=6)}{4} + \underset{(6-4=2)}{2} = 2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^1$$

$$\Rightarrow 150 = \overset{2^7}{1}\ \overset{2^6}{0}\ \overset{2^5}{0}\ \overset{2^4}{1}\ \overset{2^3}{0}\ \overset{2^2}{1}\ \overset{2^1}{1}\ \overset{2^0}{0}{}_2$$

200

7^0	7^1	7^2	7^3
1	7	49	343

$$200 = \underbrace{4 \cdot 49}_{196} + \underbrace{4 \cdot 1}_{4} = 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^0$$

$$\Rightarrow 200 = \overset{7^2}{4}\ \overset{7^1}{0}\ \overset{7^0}{4}{}_7$$

b) $123_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1$

$= 25 + 10 + 3 = 38_{10}$

$10101010_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

$= 128 + 32 + 8 + 2 = 170_{10}$

$ABC_{16} = A \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0$

$= 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 12 \cdot 1 = 2560 + 176 + 12 = 2748_{10}$

c) $572_8 = 5 \cdot \underset{(2^3)^2}{8^2} + 7 \cdot \underset{(2^3)^1}{8^1} + 2 \cdot \underset{(2^3)^0}{8^0} = 5 \cdot 2^6 + 7 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^0$

$= (2^2+1) \cdot 2^6 + (2^2+2+1) \cdot 2^3 + 2^1$

$= 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1$

$= 101111010_2$

(
<u>umständlicher (über's Zehnersystem):</u>

$572_8 = 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 5 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 320 + 56 + 2$

$= 378_{10}$

$$378_{10} = \overset{2^8}{256} + \overset{2^6}{64} + \overset{2^5}{32} + \overset{2^4}{16} + \overset{2^3}{8} + \overset{2^1}{2}$$

(378−256=122) (122−64=58) (58−32=26) (26−16=10) (10−8=2)

$= 101111010_2$
)

Aufg. 2

a) $\frac{13}{17}$ $\left(= 0,\overline{7647058823529411}\right)$

$$13 : 17 = 0,\overset{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16}{\overline{7647058823529411}}$$

```
13 : 17 = 0,7647058823529411
 0
130
119
 110
 102
   80
   68
   120
   119
     10
      0
     100
      85
      150
      136
       140
       136
         40
         34
          60
          51
           90
           85
            50
            34
            160
            153
              70
              68
               20
               17
                30
                17
                13  ← gleicher Rest wie oben!
                      ⇒ ab hier wiederholt sich's!
```

$\frac{4}{15}$ $\left(= 0,2\overline{6}\right)$

$$4 : 15 = 0,2\overline{6}$$

```
4 : 15 = 0,26
0
40
30
100
 90
 10  ← gleicher Rest!
       ⇒ ab hier wiederholt sich's!
```

Aufg. 2

b) Man erkennt den Beginn einer periodischen Wdh. daran, dass man einen Rest erhält, den man vorher (weiter oben) schon einmal hatte!

c) Angenommen man will die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{a}{b}$ bestimmen. Dann gibt es für den Rest bei der Division durch b, also für $\frac{x}{b}$ mit $x \in \{0, \dots, b-1\}$ genau b verschiedene Möglichkeiten!
Im Falle "Rest 0" bricht die Zerlegung direkt ab, und man ist fertig! ($\Rightarrow$ Periode von Nullen)

Ansonsten erhält man spätestens nach der $(b-1)$-ten Nachkommastelle eine Wdh., so dass sich eine Periode ergibt und man aufhören kann!

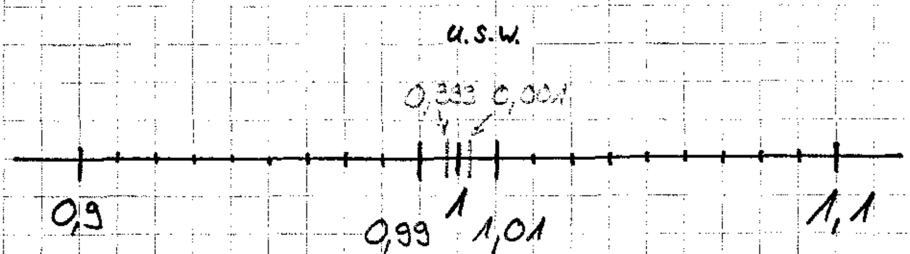
Beispiel: $\frac{13}{17}$

Für den Rest bei Division durch 17, also für $\frac{x}{17}$ mit $x \in \{0, \dots, 16\}$ gibt es 17 verschiedene Möglichkeiten!
Bei "Rest 0" kann man direkt aufhören $\Rightarrow$ Es verbleiben 16 versch. Mögl. für den Rest.

$\Rightarrow$ Spätestens nach der 16. Nachkommastelle erhält man eine Wdh.!

$\Rightarrow$ Am Nenner des Bruches ("Divisor") kann man erkennen, wie lang die Dezimalbruchentwicklung höchstens werden kann!!!

Aufg. 3



- 0,99 liegt in dem Intervall [0,9 ; 1]
- 0,999 — " — [0,99 ; 1]
- 0,9999 — " — [0,999 ; 1]

u.s.w.

- 1,01 liegt in dem Intervall [1 ; 1,1]
- 1,001 — " — [1 ; 1,01]
- 1,0001 — " — [1 ; 1,001]

u.s.w.

Man nähert sich also von beiden Seiten der 1 an.

Die Intervalle, in denen man die jeweils nächste Zahl suchen muss, gehen gegen ein Intervall der Länge Null.
(D.h. die Intervalllängen gehen gegen Null.)

Sei also z.B. ε die Intervalllänge, dann gilt sowohl für 0,99999... als auch für 1,000000..., dass $\varepsilon = 0$ ist somit

$$0,99999... = 1 = 1,000000...$$

Aufg. 4

$\frac{13}{17}$ (≈ 0.7647058 laut TR)

ganzzahliger Anteil (Gaußklammer)

$\left[\frac{13}{17}\right] = \underline{0}$ $\quad$ Rest: $\frac{13}{17}$

$\left[\frac{1}{\frac{13}{17}}\right] = \left[\frac{17}{13}\right] = \underline{1}$ $\quad$ Rest: $\frac{4}{13}$

$\left[\frac{1}{\frac{4}{13}}\right] = \left[\frac{13}{4}\right] = \underline{3}$ $\quad$ Rest: $\frac{1}{4}$

$\left[\frac{1}{\frac{1}{4}}\right] = \left[\frac{4}{1}\right] = \underline{4}$ $\quad$ Rest: 0

$$\Rightarrow \frac{13}{17} = \underline{0} + \cfrac{1}{\underline{1} + \cfrac{1}{\underline{3} + \cfrac{1}{\underline{4}}}} \approx 0.7647058 \checkmark$$

[redacted] $\frac{33}{49}$ (≈ 0.6734693 laut TR)

$\left[\frac{33}{49}\right] = \underline{0}$ $\quad$ Rest: $\frac{33}{49}$

$\left[\frac{1}{\frac{33}{49}}\right] = \left[\frac{49}{33}\right] = \underline{1}$ $\quad$ Rest: $\frac{16}{33}$

$\left[\frac{1}{\frac{16}{33}}\right] = \left[\frac{33}{16}\right] = \underline{2}$ $\quad$ Rest: $\frac{1}{16}$

$\left[\frac{1}{\frac{1}{16}}\right] = \left[\frac{16}{1}\right] = \underline{16}$ $\quad$ Rest: 0

$$\Rightarrow \frac{33}{49} = \underline{0} + \cfrac{1}{\underline{1} + \cfrac{1}{\underline{2} + \cfrac{1}{\underline{16}}}} \approx 0.6734693 \checkmark$$