Zu Blatt 2 (nur Aufg. 4 & 5)

Aufg. 4

a) $1563 : 4 = 390$ Rest 3 $\Rightarrow$ an Position 1563 steht ein R

b)
$$\begin{aligned}
1792 : 2 &= 896 \\
896 : 2 &= 448 \\
448 : 2 &= 224 \\
224 : 2 &= 112 \\
112 : 2 &= 56 \\
56 : 2 &= 28 \\
28 : 2 &= 14 \\
14 : 2 &= 7
\end{aligned}$$

$7 : 4 = 1$ Rest 3 $\Rightarrow$ an Position 1792 steht ein R

c) $2^{438} - 1 = (2^2)^{219} - 1 = 4^{219} - 1$

$\underbrace{(4^{219} - 1)}_{\text{ungerade}} : 4 = (4^{218} - 1)$ Rest $\underbrace{(4-1)}_{=3}$ $\Rightarrow$ an Pos. $2^{438}-1$ steht ein R

$4 \cdot (4^{218} - 1) = 4^{219} - 4 \qquad 4^{219} - 4 + 3 = 4^{219} - 1$

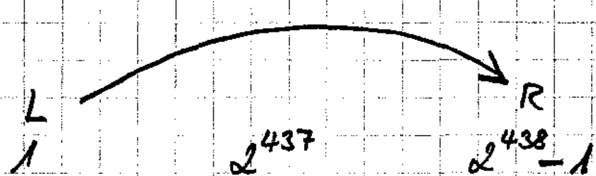
oder: !

$(2^{438} - 1) \bmod 4 = (2^2 - 1) \bmod 4 = 3 \bmod 4 = 3$

$\Rightarrow$ R

oder: !!

- $2^{438} - 1$ ist eine Position vor einer 2er-Potenz.
- Auf so einer Position muss (sofern sie > 2 ist) immer ein R stehen, da das "L" der 1. Position auf diese Position reflektiert wird !!!



Aufg. 5

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Periode p, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$a_{n+p} = a_n$.

a) <u>Erklärung:</u> Die ersten p Folgeglieder wiederholen sich immer wieder.

<u>Beispiel:</u>
$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5, \ldots$$
$$= -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Periode $p = 2$.

b) <u>Beweis durch Widerspruch:</u>

<u>Annahme:</u> Die Papierfaltungsfolge ist periodisch mit Periode p.

Wir wollen nun das „Inflationsgesetz" anwenden & zeigen, dass auf Position p nie dasselbe Symbol stehen kann wie auf Position $3p$.

(„<u>Inflationsgesetz</u>": gerade Zahl so oft durch 2 dividieren bis sie ungerade wird & dann durch 4 dividieren: Rest 1 $\Rightarrow$ L
Rest 3 $\Rightarrow$ R)

Um das Inflationsgesetz auf die Zahl p anzuwenden, muss also die größte 2er-Potenz aus der Zahl p herausgezogen werden & übrig bleibt eine ungerade Zahl, die genauer untersucht werden muss!

$$\Rightarrow \quad p = \underbrace{2^n}_{\text{2er-Potenz}} \cdot \underbrace{(2k-1)}_{\text{ungerade Zahl}} \qquad n, k \in \mathbb{N}$$

1.) <u>Bestimmung des Symbols auf Position p:</u>

n-malige Division durch 2

$\Rightarrow \tilde{p} = 2k-1$

$\rightarrow$ Falls k <u>gerade</u>: $2k$ ist Vielfaches von 4 $\Rightarrow (2k-1) \bmod 4 = -1$ (≙ Rest 3)
$(4, 8, 12, 16, \ldots)$
$\Rightarrow$ R

$\rightarrow$ Falls k <u>ungerade</u>: $2k+2$ ist Vielfaches von 4 $\Rightarrow (2k-1) \bmod 4 = +2-1 = 1$
$(2+2, 6+2, 10+2, 14+2, \ldots)$
$\Rightarrow$ L

Aufg. 5 b) Fortsetzung:

2.) Bestimmung des Symbols auf Position $3p$:

$$3p = 3 \cdot 2^n \cdot (2k-1) = 2^n \cdot (6k-3)$$

n-malige Division durch 2

$\Rightarrow \bar{p} = 6k-3$

→ Falls k gerade: $6k$ ist Vielfaches von $4 \Rightarrow (6k-3) \bmod 4 = -3$
$(12, 24, 36, \ldots)$
$(\hat{=}$ Rest $1)$
$\Rightarrow$ L

→ Falls k ungerade: $6k+2$ ist Vielfaches von $4 \Rightarrow (6k-3) \bmod 4 = +2-3$
$(6+2, 18+2, 30+2, \ldots)$
$= -1$
$(\hat{=}$ Rest $3)$
$\Rightarrow$ R

1.), 2.) $\Rightarrow$ Wenn auf Position p ein R steht, dann steht auf Position $3p$ ein L, und [redacted] umgekehrt, d.h. auf Position p und $3p$ steht nie dasselbe Symbol!

↯ Widerspruch zur Annahme!

$\Rightarrow$ Die Papierfaltungsfolge ist nicht periodisch!