

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

A. Π_n sei ein regelmäßiges n -Eck, **eingeschrieben** in den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt M . Die Eckpunkte von Π_n seien E_1, E_2, \dots, E_n . Außerdem sei α_n der Winkel zwischen $\overline{ME_1}$ und $\overline{ME_2}$. Es gilt $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$.

1. Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{E_1E_2}$ mit Hilfe von $\sin \frac{\alpha_n}{2}$;
2. Berechnen Sie die Folge der Umfänge $U_4, U_8, U_{16}, \dots, U_{2^{20}}$ mit einem Tabellenkalkulationsprogramm. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit 2π ;
3. Was folgt aus Aufgabenteil A2 für den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$ mit $x_n = \frac{\pi}{n}$.
4. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (z. B. mit einem graphischen Taschenrecher, Tabellenkalkulationsprogramm, ...). Interpretieren Sie das Ergebnis des Aufgabenteils A3.

B.

1. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Siehe den Hinweis

Wir wissen, dass

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Definiere $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

2. Berechnen Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm $S_n(1)$, $S_n(\frac{1}{2})$ und $S_n(\frac{1}{3})$, für $n = 1, \dots, 10$.
3. Vergleichen Sie mit dem Tabellenkalkulationsprogramm $S_n(1)$ mit $\frac{\pi}{4}$, für $n = 1, \dots, 10$.
4. Vergleichen Sie mit dem Tabellenkalkulationsprogramm $\frac{\pi}{4}$ mit $S_n(\frac{1}{2}) + S_n(\frac{1}{3})$, für $n = 1, \dots, 10$.