

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

11. Übung Spiralen und π

Abgabe: Do, 25. Januar 2007

1. Variation zur Baravelle-Spirale (*ehemalige Examensklausur-Aufgabe*)

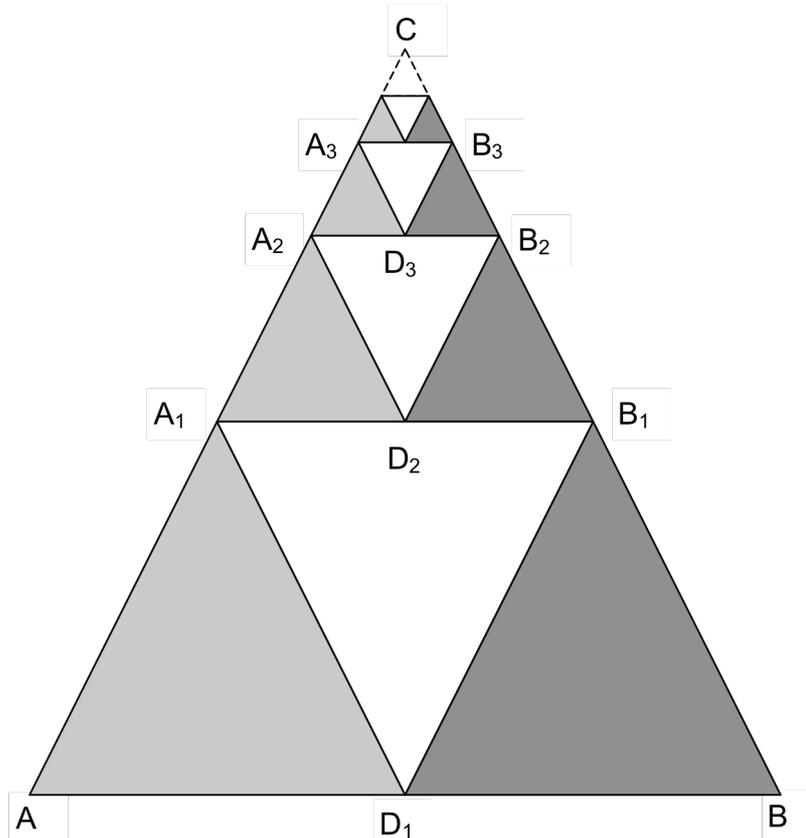


Abb. 1

In Abb. 1 ist A_1 die Mitte von \overline{AC} , B_1 die Mitte von \overline{BC} und D_1 die Mitte von \overline{AB} . Die Teilung wird fortgesetzt, indem für $n = 1, 2, 3, \dots$ A_{n+1} die Mitte von $\overline{A_n C}$ ist, B_{n+1} die Mitte von $\overline{B_n C}$ ist und D_{n+1} die Mitte von $\overline{A_n B_n}$ ist.

- a. Begründen Sie, dass die Dreiecke AD_1A_1 , $D_1B_1A_1$ und D_1BB_1 flächengleich sind.
 - b. Begründen Sie analog zu a., dass für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Dreiecke $A_n D_{n+1} A_{n+1}$, $D_{n+1} B_{n+1} A_{n+1}$ und $D_{n+1} B_n B_{n+1}$ flächengleich sind.
 - c. Es sei $A(PQR)$ der Flächeninhalt des Dreiecks PQR. Bestimmen Sie r in der Gleichung $A(AD_1A_1) = r \cdot A(A_1D_2A_2)$.
 - d. Zeigen Sie nun unter Bezug auf a., b. und c., dass gilt: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$.
2. P_n sei ein regelmäßiges n -Eck, **umschrieben** um den Kreis mit Radius 1. Die Seitenlänge von P_n sei S_n . Dann ist der Umfang $U_n = n \cdot S_n$.
 - a. Finden Sie eine Konstruktion von P_{2n} mit Hilfe des n -Ecks P_n .
 - b. Berechnen Sie S_{2n} mit Hilfe von S_n .
 - c. Berechnen Sie die Folge der Umfänge
 - i) $U_4, U_8, U_{16}, \dots, U_{2^{20}}$,
 - ii) $U_3, U_6, U_{12}, \dots, U_{3 \cdot 2^{20}}$, mit einem Tabellenkalkulationsprogramm.
 Vergleichen Sie die Ergebnisse mit 2π .