Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen Wintersemester 2006/07

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

7. Übung Wurzeln berechnen Abgabe: Do, 14.Dezember 2006

1. Berechnen Sie <u>schriftlich</u> $\sqrt{11}$ auf 3 Stellen hinter dem Komma. Schreiben Sie die Rechenschritte deutlich auf.

2. Berechnung von Näherungsbrüchen mit dem Heronverfahren
   Wählen Sie sich eine natürliche Zahl w (z.B. 39). Starten Sie dann das Heronverfahren mit der natürlichen Zahl n, deren Quadratzahl n^2 am dichtesten an w liegt (Beisp $n = 6$). Führen Sie einen Schritt durch und rechnen Sie mit Brüchen. Kürzen Sie nicht, sondern behalten Sie den Nenner $2n$ $x_1 = \frac{1}{2}(6+\frac{39}{6}) = 3+\frac{39}{12} = 6\frac{3}{12}$ also $\sqrt{39} \approx 6\frac{3}{12}$
   Erforschen Sie mit vielen Beispielen rein experimentell, wie man zu einer natürlichen Zahl w den Näherungsbruch bestimmt. Beschreiben Sie das „Rezept", das von w direkt zum Ergebnis führen soll.

3. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 7$.
   a. Berechnen Sie die Nullstelle von f. Berechnen Sie für die Wurzel einen Näherungswert mit dem Taschenrechner.
   b. Leiten Sie die Newton-Funktion her, also die Funktion, die sich nach dem Newton-Verfahren aus f ergibt. (Der erläuterte Weg ist wichtig!)
   c. Die Newton-Funktion lautet $n(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3x^2}$.
   Berechnen Sie $n(2)$ als Bruch. Wie groß ist die Abweichung zum Näherungswert in a)?
   d. Berechnen Sie $f(2{,}5)$ und $n(2{,}5)$. Zeichnen Sie die berechneten Werte in das Achsenkreuz rechts ein und ergänzen Sie die Zeichnung im Sinn des Newton-Verfahrens.
   e. Gegeben ist $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x^2}\right)$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = h(x)$ als Lösung ebenfalls $\sqrt[3]{7}$ besitzt.
   f. Gegeben sind die rekursiven definierten Zahlenfolgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_{n+1} = n(x_n)$ und $y_{n+1} = h(y_n)$ und die Startwerte $x_0 = y_0 = 3$. Berechnen Sie jeweils die ersten 4 Folgenglieder und beurteilen Sie das Konvergenzverhalten.