

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

1. Übung: Folgen und Reihen

Abgabe: -----

1. Aufgabe

- a) Zur Folge $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ haben wir die rekursive Form $a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1$ hergeleitet. Leiten Sie eine Form her, in der a_n ausschließlich durch a_{n-1} definiert wird.
- b) Leiten Sie zur geschlossenen Form $a_n = \frac{n+1}{n}$ eine rekursive Form her (es gibt hier viele verschiedene Lösungen). Machen Sie die Probe mit a_1 bis a_4 .

2. Aufgabe Fibonacci-Zahlen

- a) Berechnen Sie die Fibonacci-Zahlen $F_1=1, F_2=1, \dots, F_{10}$.
- b) Berechnen Sie (Taschenrechner, Dezimalzahlen mit 6 Stellen) $q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, n = 1, 2, \dots, 9$. Was fällt auf? Vergleichen Sie mit der Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, die in der Formel von Binet vorkommt.
- c) (!! Berechnen Sie $S_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n, n = 1, 2, \dots, 10$. Welche Regelmäßigkeit fällt Ihnen auf? Formulieren Sie diese Regelmäßigkeit formal und beweisen Sie sie mit vollständiger Induktion.

3. Aufgabe Arithmetische Reihe

Berechnen Sie $2+7+12+17+ \dots +97$, indem Sie

- a) rechnen wie der junge Gauß.
- b) die Aufgabe so umformen, dass $1+2+3+\dots+??$ entsteht und Sie dann die Summenformel $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ verwenden.

4. Aufgabe Mathematik und Musik

In der chromatischen (=temperierten) Stimmung wird die Frequenz des Grundtons über eine geometrische Folge in 12 Stufen zur Oktave (doppelte Frequenz des Grundtons) verändert.

$$\begin{array}{cccccccccccc} c & cis & d & dis & e & f & fis & g & gis & a & b & h & c' \\ \frac{1}{\cdot q} & & & & & & & & & & & & 2 \end{array}$$

- a) Wie groß ist q ? (exakter Wert und dezimale Näherung)
- b) Die Quinte ($c \rightarrow g$) soll bei reiner Stimmung 1,5 sein. Wie ist das bei der temperierten Stimmung? Berechnen Sie den Unterschied zwischen exakter und temperierter Stimmung bei einem Grundton von 600 Hz. Kann man den Unterschied hören?