9 Das Problem der Überschneidung

Variation des Auffaltwinkels

Bei der geometrischen Interpretation der Papierfaltungswörter haben wir, entsprechend zu den üblichen Darstellungen in der Literatur, den Auffaltwinkel mit 90° gewählt. Die daraus resultierenden Polygone ergaben ein regelmäßiges und geschlossenes Muster.

Winkel kleiner als 90°

Es ist nahe liegend, dass ein Winkel unter 90° in dem Augenblick zu einander überschneidenden Linien führt, wenn drei gleiche Knicke aufeinander folgen also „...LLL...“ oder „...RRR...“. Das ist zum ersten Mal im Wort $\boldsymbol{w_4}$ der Fall.

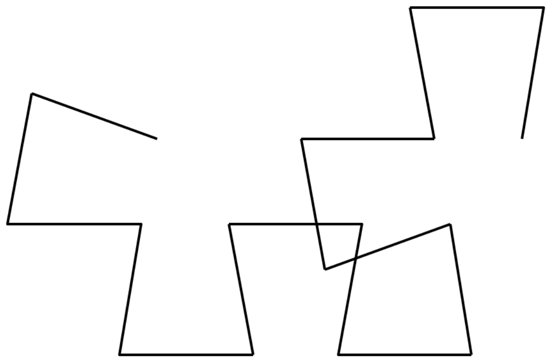


Abb. 9.1: Das Polygon zum Wort w_4 und einem Winkel von 80° zwischen den Kanten

Winkel von 60°

Zudem erhält man unregelmäßige Muster. Nur für einen Winkel von 60° ergeben sich wieder regelmäßige Muster. Dabei gibt es allerdings Polygonseiten, die übereinander liegen. Das lässt sich leicht aus dem Polygon ablesen, das man für Auffaltwinkel erhält, die etwas größer als 60° sind. (siehe Abb. 9.2)

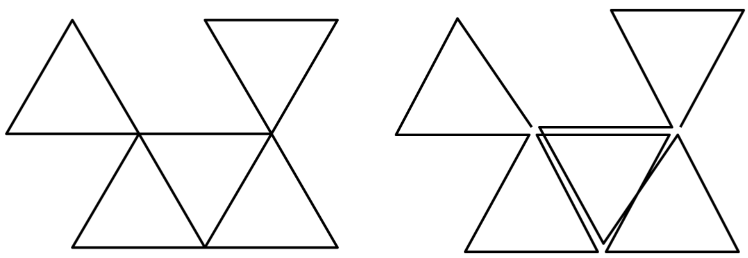


Abb. 9.2: Das Polygon zum Wort w_4 und einem Winkel von 60° bzw. 62° zwischen den Kanten

Kommt es bei 90° zu doppelten Kanten?

Das wirft die Frage auf, ob denn nicht auch für den Fall eines Auffaltwinkels von 90° Kanten mehrfach durchlaufen werden. Schließlich fallen auch hier Eckpunkte des Polygons zusammen und eröffnen so die Möglichkeit für ein mehrfaches Durchlaufen von Kanten.

Dieses ist für einen Auffaltwinkel von 90° jedoch nie der Fall, wie man mit einer anschaulichen Betrachtung einsichtig nachweisen kann.

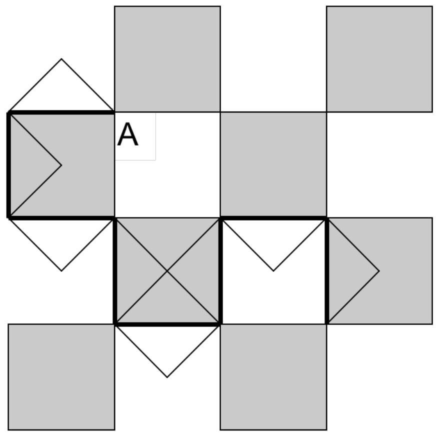


Abb. 9.3: Die Polygone zum Wort w_3 (dicke Linie) und w_4, gezeichnet auf einem Schachbrettmuster

Wir zeichnen ein Papierfaltungs-Polygon einer beliebigen Stufe auf ein Schachbrettmuster. Beim Durchlaufen des Polygons liegen die schwarzen Flächen immer auf derselben Seite (in Abb. 9.3 immer zur Linken). Beim geometrischen Inflationsprozess werden auf die Kanten eines Polygons immer abwechselnd Dreiecke nach rechts oder links aufgesetzt, also immer abwechselnd in ein weißes und ein schwarzes Feld des Schachbrettmusters. Da in jedem Knick die Richtung von waagerecht nach senkrecht wechselt oder umgekehrt, heißt das, dass die Dreiecke, die in ein schwarzes Feld gesetzt werden, alle auf Kanten gezeichnet werden, die entweder alle waagerecht oder senkrecht verlaufen.

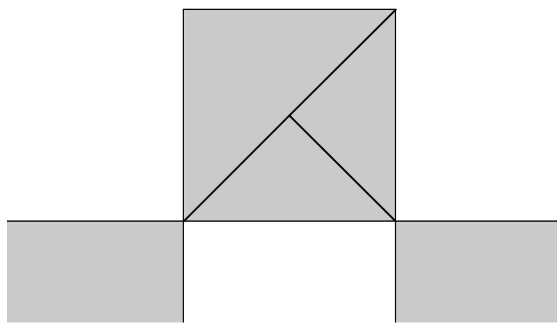


Abb. 9.4: Eine doppelt durchlaufene Kante gehört zu zwei verschiedenen Dreiecken, die auf einer senkrechten und einer waagerechten Kante aufgesetzt wurden

Wenn nun eine Kante doppelt durchlaufen werden soll, so müssen die aufgesetzten Dreiecke in einem Eckpunkt zusammenstoßen und daher zu einer waagerechten und einer senkrechten Kante gehören und in das gleiche Schachbrettfeld gezeichnet werden. Das ist aber nicht möglich, da die aufgesetzten Dreiecke zu einer waagerechten und senkrechten Kante in verschiedenfarbige Felder gezeichnet werden. Folglich kann es bei den Polygonen, die wir in Kapitel 4 betrachtet haben, nicht zu Überschneidungen kommen.

Winkel über 90°

Für Auffaltwinkel über 90° war man bisher der Meinung, dass es zu keinen Überschneidungen kommt. Dafür gibt es keine Beweise, jedoch legen das Zeichnungen von Polygonen nahe (siehe Abb. 9.5). Mendès France vergleicht in [P07] das Überschreiten der 90°-Grenze mit einem Phasenübergang von „flüssig“ nach „gasförmig“. Während es unter und bei 90° zu Überlappungen und doppelten Punkten kommt, sei dieses über 90° nicht der Fall. Da er keine Beweise für die letzte Behauptung hat, formuliert er diese Betrachtung allerdings als Frage, die er abschließt mit „How can I justify my intuitions?"

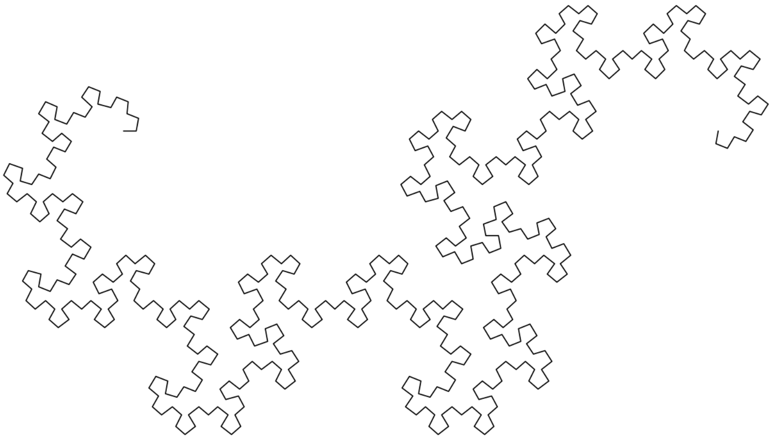


Abb. 9.5: Das Polygon zum Wort w_9 und einem Winkel von 100° zwischen den Kanten

Ich möchte hier nachweisen, dass die Intuition Mendès France getäuscht hat und dass es entgegen der allgemein vertretenen Auffassung sehr wohl zu Überschneidungen kommen kann, wenn der Auffaltwinkel über 90° beträgt. Diese Entdeckung wurde nach meiner Information zuerst von H.-O. Peitgen im Frühjahr 1995[2] bei Versuchen mit computergenerierten Zeichnungen gemacht. Ein solches Beispiel zeigt Abb. 9.6

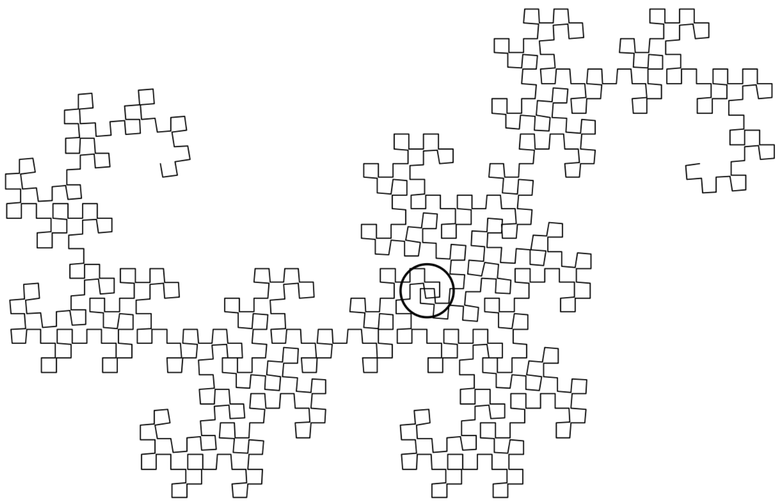


Abb. 9.6: Im Zentrum kommt es zu einer Überschneidung

Überschneidungen im Polygon

Nun ist die Zeichnung von einem Computerprogramm erstellt worden, in denen die Koordinaten der Knickpunkte schrittweise berechnet werden. Wie man aus anderen Rechnungen weiß, können sich dabei Rundungsungenauigkeiten aufaddieren und ein Ergebnis stark verfälschen. Es ist also nicht sicher, dass das, was wir sehen, auch wirklich so ist. Es erhebt sich also die Frage, ob man beweisen kann, dass es bei den Polygonen zu einer Überschneidung kommt. Zusätzlich muss geklärt werden, für welche Winkel und für welche Polygone solche Überschneidungen vorkommen. Wie

[2] private Unterhaltung

wir aus der Abb. 9.5 vermuten können, wird es auch Iterationsstufen und Winkel geben, bei denen es nicht zu einer Überschneidung kommt.

Unsere mathematischen Überlegungen beginnen wieder einmal mit der Definition der Objekte, die wir betrachten werden. Das sind wie in Kapitel 4 die Polygone, nun allerdings mit einem allgemeinen Auffaltwinkel.

Definition 9.1

Polygone mit variablem Auffaltwinkel

$\left(Q_n(\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $90° \le \alpha \le 180°$ ist eine Folge von Polygonen, die folgendermaßen in einem ebenen Koordinatensystem definiert sind:

a. Die erste Polygonkante von $Q_n(\alpha)$ beginnt im Ursprung und schließt mit der positiven *x*-Achse einen Winkel von $-n\beta$ ein, wobei $\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$ ist.

b. Das Polygon $Q_n(\alpha)$ besteht aus 2^n Kanten der Länge q^n, wobei $q = \frac{1}{2\cos\beta}$.

c. Zwischen den Kanten *k* und *k*+1, $1 \le k \le 2^n - 1$ ist ein Winkel von $\begin{Bmatrix} -\alpha \\ +\alpha \end{Bmatrix}$, wenn in dem Wort w_n an der Stelle *k* ein $\begin{Bmatrix} \text{L} \\ \text{R} \end{Bmatrix}$ steht.

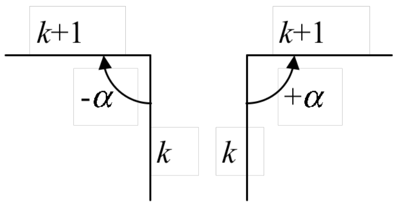


Abb. 9. 7: Die Ausrichtung der Kanten an einem Links- bzw. Rechtsknick

Die Definition bedeutet insbesondere, dass das Polygon $Q_0(\alpha)$ für alle α mit $90° \le \alpha \le 180°$ die Strecke von (0;0) nach (1;0) ist.

Anpassung der geometrischen Inflation

Die Winkelgröße β und die Länge q ergeben sich wieder aus der Überlegung, dass in einem geometrischen Inflationsprozess eine Kante durch zwei neue ersetzt wird und diese ein Dreieck bilden. (Vergl. dazu die Abb. 4.7 und Abb. 4.8)

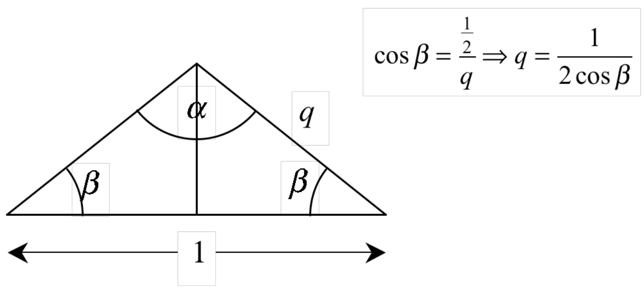


Abb. 9.8: Das Aufsetzen eines Dreiecks auf eine Kante der Länge 1

Abb. 9.9 zeigt zwei Beispiele für diese neuen, bezüglich des Auffaltwinkels α verallgemeinerten Polygone.

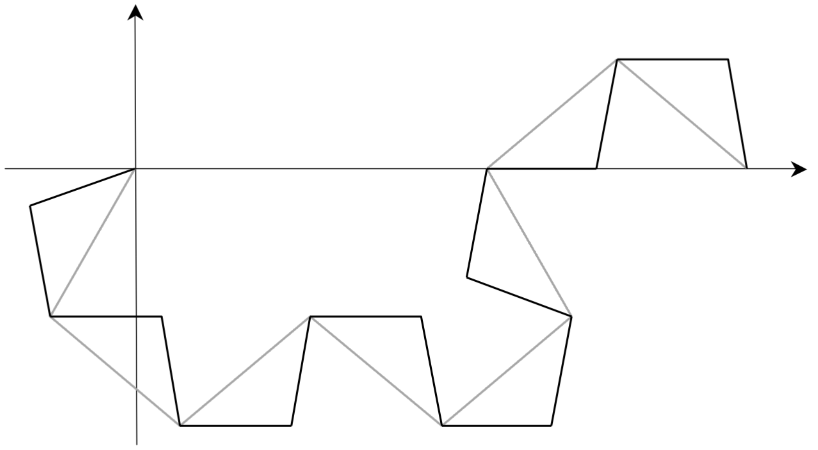


Abb. 9.9: Die Polygone $Q_3(100°)$ (grau) und $Q_4(100°)$ (schwarz)

Wir bezeichnen die Punkte der Polygone $Q_n(\alpha)$ analog zu Definition 4.3.

Definition 9.2

Der k-te Punkt im Polygon $Q_n(\alpha)$ wird mit $\mathrm{P}_{n,k}$ bezeichnet, $k = 0,...,2^n$, wobei der Anfangspunkt (der Ursprung) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{P}_{n,0}$ bezeichnet wird.

In dieser Definition verzichten wir auf die eigentlich notwendige Einbeziehung des Winkels α, da es die Lesbarkeit erhöht. Da wir üblicherweise Betrachtungen für den gleichen Winkel α anstellen, kann es zu keinen Fehlinterpretationen führen.

Übereinstimmung von Punkten

Ebenso wie in Satz 4.1 gilt, dass die Punkte $\mathrm{P}_{n,k}$ des Polygons $Q_n(\alpha)$ mit geradem Index k mit Punkten des Polygons $Q_{n-1}(\alpha)$ übereinstimmen. Dieses ist auch deutlich in Abb. 9.9 zu erkennen.

Satz 9.1

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2^n$ gilt: $P_{n+1,2k} = P_{n,k}$

Beweis

Fall 1: $k = 1$

Nach Definition 9.1 schließt die erste Kante von $Q_n(\alpha)$ mit der positiven x-Achse einen Winkel von $-n\beta$ ein und die erste Kante von $Q_{n+1}(\alpha)$ einen Winkel von $-(n+1)\beta$. Folglich ist im Dreieck $\mathrm{P}_{n0}\mathrm{P}_{n+1,1}\mathrm{P}_{n,1}$ der Winkel bei $\mathrm{P}_{n,0}$ β (siehe Abb. 9.10). Das Dreieck ist nach Definition 9.1 gleichschenklig. Da die Kanten im Polygon $Q_n(\alpha)$ um den Faktor $\frac{1}{q} = 2\cos\beta$ länger sind als die Kanten von $Q_{n+1}(\alpha)$, ist der Endpunkt $\mathrm{P}_{n,1}$ der ersten Kante des Polygons $Q_n(\alpha)$ gleich dem Endpunkt $\mathrm{P}_{n+1,2}$ der zweiten Kante des Polygons $Q_{n+1}(\alpha)$.

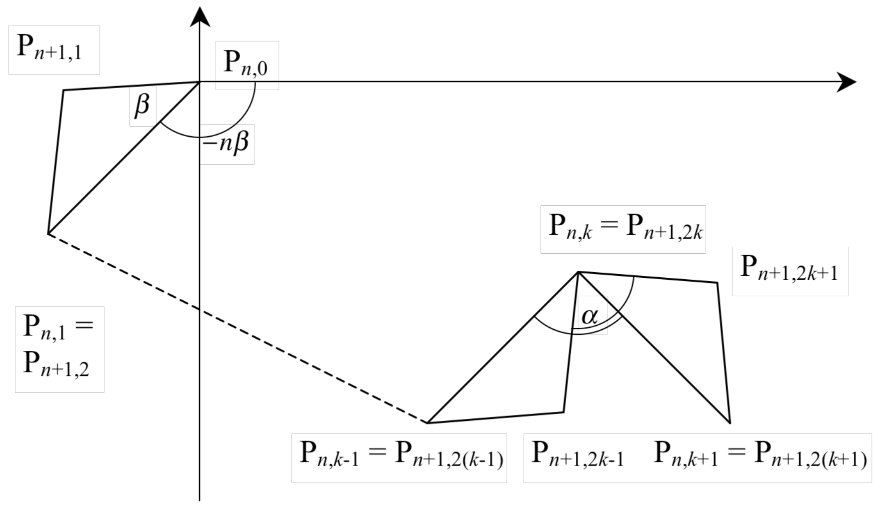


Abb. 9.10: Benennung der Eckpunkte

Fall 2: $1 < k \leq 2^n$

Fall 2a: Im Wort w_{n+1} steht an der Stelle $2k$-1 ein „L“.

Das heißt, dass im Punkt $P_{n+1,2k\text{-}1}$ die Kanten einen Winkel von $-\alpha$ bilden. Dann steht im Wort w_{n+1} an der Stelle $2k$+1 ein „R“ und die Kanten bilden im Punkt $P_{n+1,2k+1}$ einen Winkel von α. Nach Satz 2.2 a) und Satz 3.1 ist im Wort w_{n+1} das Symbol am Platz $2k$ das gleiche wie im Wort w_n das Symbol am Platz k, kurz $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k) = \tilde{\sigma}(w_n, k)$. Diese Voraussetzungen stellen sicher, dass durch Drehung um $\pm\alpha$ um den Punkt $P_{n,k}$ die Kante $\overline{P_{n,k-1}P_{n,k}}$ auf $\overline{P_{n,k}P_{n,k+1}}$, die Kante $\overline{P_{n+1,2k-1}P_{n+1,2k}}$ auf $\overline{P_{n+1,2k}P_{n+1,2k+1}}$ und die Kante $\overline{P_{n+1,2(k-1)}P_{n+1,2k-1}}$ auf $\overline{P_{n+1,2k+1}P_{n+1,2(k+1)}}$ abgebildet wird. Damit folgt aus $P_{n+1,2(k-1)} = P_{n,k-1}$ auch $P_{n+1,2(k+1)} = P_{n,k+1}$.

Fall 2b: Im Wort w_{n+1} steht an der Stelle $2k$-1 ein „R“.

Das heißt, dass im Punkt $P_{n+1,2k\text{-}1}$ die Kanten einen Winkel von α bilden. Dann steht im Wort w_{n+1} an der Stelle $2k$+1 ein „L“ und alle weiteren Argumentationen laufen analog zum Fall 2a.

Folgerung:

Die Polygone $Q_n(\alpha)$ enden für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle α mit $90° \leq \alpha \leq 180°$ im Punkt $P_{n,2^n} = (0;1)$, da $Q_0(\alpha)$ laut Definition 9.1 im Punkt $P_{0,1} = (0;1)$ endet.

Da wir in den folgenden Betrachtungen sehr viel mit dem schrittweisen Aufbau der Polygone $Q_n(\alpha)$ arbeiten werden, Satz 9.1 aber zeigt, dass die Bezeichnung der Punkte nicht eindeutig ist, führen wir für eine eindeutige Grunddarstellung das Kürzen der Indizes ein.

Definition 9.3

Ein Indexpaar (n',k') geht aus dem Indexpaar (n,k) durch Kürzen hervor, wenn gilt: $n' < n$ und $k' = \dfrac{k}{2^{n-n'}}$.

Sind die Indizes von $P_{n',k'}$ durch Kürzen aus den Indizes von $P_{n,k}$ entstanden, so sind nach Satz 9.1 die Punkte gleich.

Spiralige Struktur in den Polygonen

Betrachtet man die Polygone auf einer höheren Iterationsstufe, z.B. in Abb. 4.18 das Polygon $Q_{16}(90°)$, so fällt einem die überall sichtbare spiralige Struktur auf. Noch deutlicher wurde mir die spiralige Struktur, die für die weiteren Betrachtungen wesentlich ist, durch das Anfertigen und Studium von filmartigen Animationen, in denen der geometrische Inflationsprozess dadurch dynamisiert wird, dass die Dreiecke kontinuierlich aus den vorhandenen Kanten herausgezogen werden.

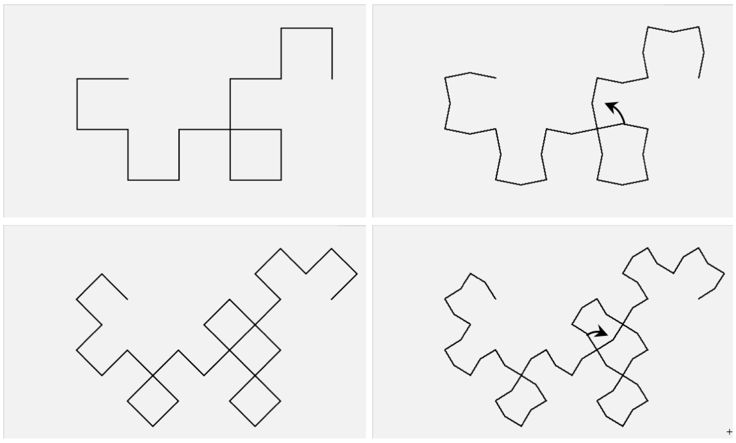


Abb. 9.11: Bilder aus dem Film Entwicklung der 4. Stufe (obere beiden Bilder) und der 5. Stufe (untere beiden Bilder) um den neu entstandenen Doppelpunkt

Dabei zeigt sich, dass die vier Kanten, die in einem neu entstandenen Doppelpunkt zusammenlaufen, sich im ersten Inflationsschritt gegen den Uhrzeigersinn drehen, dann aber in allen nachfolgenden Schritten im Uhrzeigersinn.

Computeranimationen können den Erkenntnisprozess fördern

Diese Erkenntnis ist insofern bemerkenswert, da sie den Wert von grafischen Veranschaulichungen und Computerexperimenten herausstellt. Durch diese filmische Animation, die wiederum nur durch den Einsatz des Computers ermöglicht wurde, sind die nachfolgenden Betrachtungen ganz wesentlich unterstützt worden. Graphische Darstellungen und dynamische Animationen, wie sie z.B. heute leicht mit dynamischer Geometriesoftware hergestellt werden können, sind unverzichtbare Mittel für die mathematische Erkenntnisgewinnung.

Fassen wir diese dynamische Darstellung in einem statischen Bild zusammen, so fügen wir bei mehreren, aufeinander folgenden Inflationsschritten das erste Dreieck gegen den Uhrzeigersinn an, alle nachfolgenden im Uhrzeigersinn.

In Abb. 9.12 betrachten wir den Punkt $P_{1,1}$. Auf jede Kante, die im Punkt $P_{1,1}$ endet, wird bei jedem Schritt der geometrischen Inflation ein Dreieck aufgesetzt, das unmittelbar vor $P_{1,1}$ einen neuen Polygonpunkt erzeugt. Es gilt die Gesetzmäßigkeit, dass bis auf das erste Dreieck, also zur Erzeugung von $P_{2,1}$, alle nachfolgenden Dreiecke Rechtsknicke erzeugen. Diese so erzeugten Punkte liegen auf einer Spirale um $P_{1,1} = P_{2,2} = P_{3,4} = P_{4,8} = \dots$.

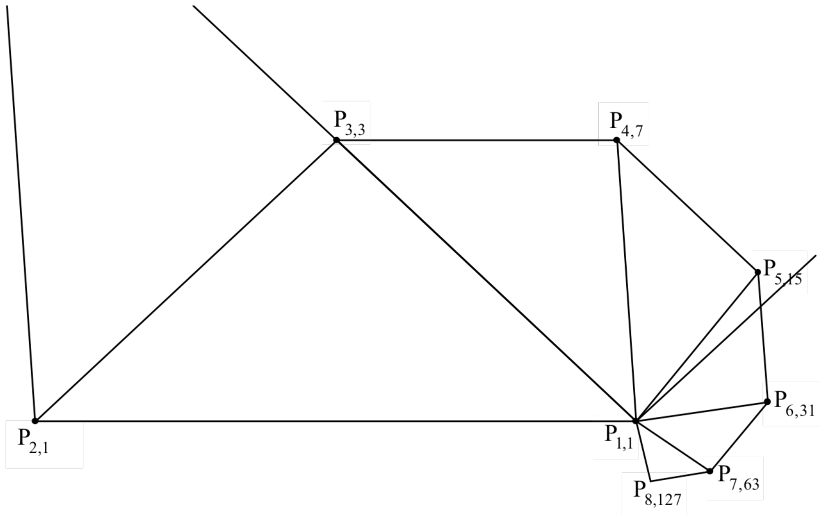


Abb. 9.12: Die spiralige Entwicklung um den Punkt $P_{1,1}$ $(\alpha = 94°)$

Gesetzmäßigkeit für das iterierte Einfügen von Symbolen

Dieses wiederholte Einfügen eines „R“ führt zu der spiraligen Entwicklung um jeden Punkt eines Polygons $Q_n(\alpha)$, so wie sie in Abb. 9.12 anschaulich dargestellt wurde.

Wir können uns diese Regelmäßigkeit noch einmal an den Wörtern klar machen, indem wir uns ganz allgemein 4 Schritte der Inflation anschauen.

```
A.......A.......A.......A.......A.......A Stufe n-1
u       g       u       g       u       g

A...R...A...L...A...R...A...L...A...R...A Stufe n
g   u   g   u   g   u   g   u   g   u   g
A...B...A...B...A...B...A...B...A...B...A

A.L.B.R.A.L.B.R.A.L.B.R.A.L.B.R.A.L.B.R.A Stufe n+1
g u g u g u g u g u g u g u g u g u g u g
A.C.B.C.A.C.B.C.A.C.B.C.A.C.B.C.A.C.B.C.A

ALCRBLCRALCRBLCRALCRBLCRALCRBLCRALCRBLCRA Stufe n+2
```

Abb. 9.13: Die Entwicklung der Symbole mit dem Inflationsgesetz

Auf Stufe *n*-1 bezeichnen wir alle Symbole abstrakt mit „A“, die Platznummern wechseln natürlich zwischen gerade und ungerade. Vor einen geraden Platz der Stufe *n*-1 wird auf der Stufe *n* ein R eingefügt, vor einen ungeraden ein „L“. Für die weitere Betrachtung bezeichnen wir nun die Symbole, die bereits auf Stufe *n*-1 vorhanden waren, mit „A“, während die durch den Inflationsschritt neu eingefügten mit „B“ bezeichnet werden, egal ob es ein „L“ oder „R“ war. Wie wir der Abb. 9.13 entnehmen können, wird auf Stufe *n*+1 vor jedem „A“ ein „R“ eingefügt, während vor jedem „B“, welches die Symbole sind, die auf der *n*-ten Stufe dazugekommen sind, ein „L“ eingefügt wird. Die „B“ sind auf der *n*-ten Stufe auf den ungeraden Plätzen eingefügt worden. Bei der neuen Nummerierung auf der Stufe n+1 stehen die B auf Plätzen mit gerader Platznummer *k*, mit $k \equiv 2 \bmod 4$. Folglich ist jeder Platz davor einer mit ungerader Platznummer *u*, mit $u = k - 1 \equiv 1 \bmod 4$. Nach dem Inflationsgesetz wird auf all diesen Plätzen ein L eingefügt. Diese Regelmäßigkeit ist auch auf der Stufe *n*+2 sehr schön zu erkennen. Vor jedem „alten“ Symbol „A“ oder „B“ werden „R“s eingefügt, während vor den neuen „C“s jeweils ein „L“ eingefügt wird.

Diesen hier am Beispiel demonstrierten Sachverhalt wollen wir nun präzise formulieren und beweisen.

Satz 9.2

Es seien $P_{n,k-1}$, $n,k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le 2^n$, und $P_{n,k}$ zwei in $Q_n(\alpha)$ aufeinander folgende Punkte. Dann wird beim nächsten Inflationsschritt der Punkt $P_{n+1,2k-1}$ zwischen $P_{n,k-1}$ und $P_{n,k}$ eingefügt und es gilt $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k-1) = \mathrm{L}$, wenn $P_{n,k}$ nicht kürzbar ist und $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k-1) = \mathrm{R}$, wenn $P_{n,k}$ kürzbar ist.

Beweis

Wenn $P_{n,k-1}$ und $P_{n,k}$ zwei in $Q_n(\alpha)$ aufeinander folgende Punkte sind, so sind diese nach Satz 9.1 in $Q_{n+1}(\alpha)$ die Punkte $P_{n+1,2k-2}$ und $P_{n+1,2k}$. Folglich ist der zwischen ihnen liegende Punkt $P_{n+1,2k-1}$.

Im Kapitel 3 zum Inflationsgesetz haben wir gefunden, dass auf Platznummern, die beim Teilen durch 4 einen Rest von 1 lassen, ein „L“ steht. Ein Rest von 3 ergibt ein „R“.

Ist $P_{n,k}$ nicht kürzbar, so ist nach Definition 9.3 k ungerade, d.h. es gibt ein $t \in \mathbb{N}_0$ mit $k = 2t + 1$.

Dann ist $2k-1 = 2(2t+1)-1 = 4t+1$. Also ist $2k-1 \equiv 1 \bmod 4$, damit steht an diesem Platz ein „L“.

Ist $P_{n,k}$ kürzbar, so gibt es nach Definition 9.3 ein Indexpaar n^*,k^* mit $k = 2^{n-n^*}k^*$ und $n - n^* \ge 1$. Also ist $2k-1 = 2 \cdot 2^{n-n^*}k^* - 1 = 4 \cdot 2^{n-n^*-1}k^* - 1$. Also gilt für die Platznummer $2k-1 \equiv -1 \equiv 3 \bmod 4$, damit steht an diesem Platz ein „R“.

Nach diesen Erläuterungen für das Einfügen weiterer Symbole nach dem Inflationsgesetz und für das Zustandekommen der spiraligen Strukturen können wir auch anschaulich einsehen, dass es bei Winkeln über 90° zunächst zu Überschneidungen kommen muss.

Eine anschauliche Erläuterung für die Überschneidungen

Für $\alpha = 90°$ sind die spiraligen Strukturen gut am Rand des Polygons zu erkennen. Wegen der Selbstähnlichkeit existieren diese aber auch zwischen den Teilfiguren, nur sind sie hier normalerweise nicht zu erkennen, da die Ränder der verschiedenen Teile perfekt ineinander greifen und es auch nicht, wie wir oben gesehen haben, zu einem doppelten Durchlaufen von Kanten kommt. Diese perfekte Verzahnung von ineinander greifenden spiraligen Strukturen kann man erkennen, wenn man verschiedene Teile der Polygone unterschiedlich einfärbt.

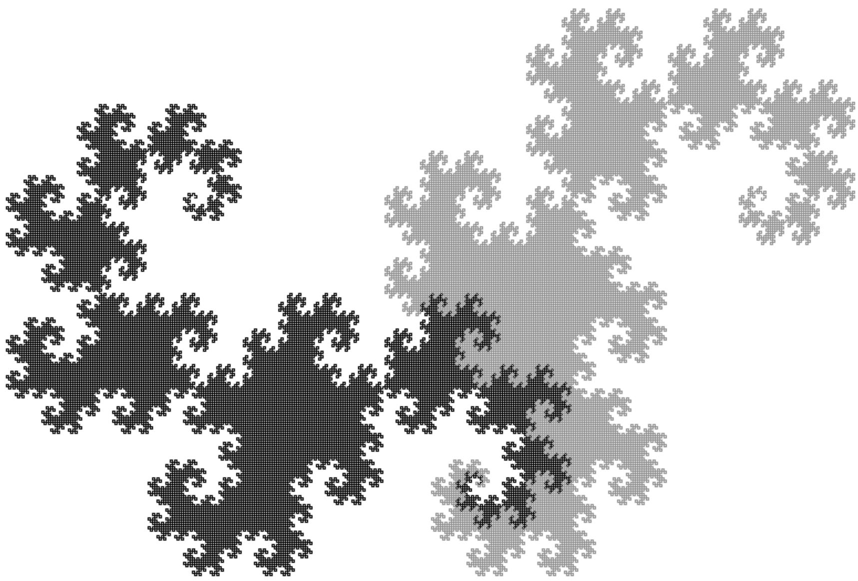


Abb. 9.14: $Q_{16}(90°)$, wobei die erste Hälfte dunkel, die zweite hell gefärbt ist

Vergrößert man nun α um wenige Grad, so bewegen sich die Teile geringfügig gegeneinander. Die spiraligen Strukturen werden nun auseinander gerissen und Spiralarme, die für $\alpha = 90°$ perfekt ineinander passen, liegen übereinander - es kommt zu Überschneidungen.

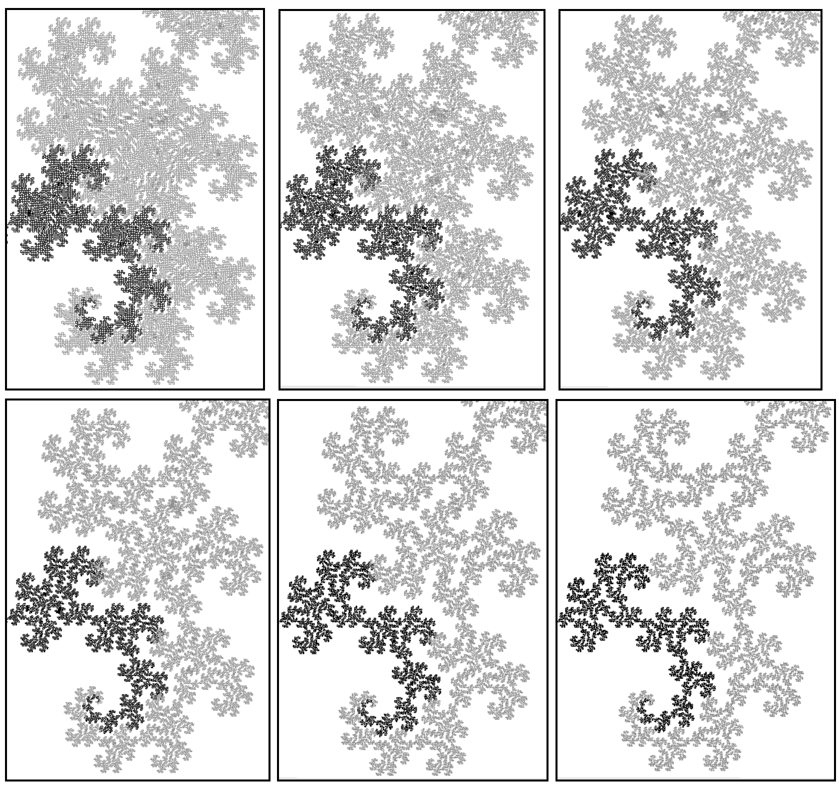


Abb. 9.15: Ausschnitte aus den Polygonen $Q_{16}(91°)$, $Q_{16}(92°)$, $Q_{16}(93°)$ und $Q_{16}(94°)$, $Q_{16}(95°)$, $Q_{16}(96°)$

In Abb. 9.15 kann man gut erkennen, wie für $\alpha > 90°$ dunkel- und hellgrau gefärbte Teile übereinander liegen und für $\alpha = 96°$ vermutlich so weit auseinander gezogen sind, dass es nicht mehr zu Überschneidungen kommt.

Wir wenden uns nun dem ursprünglichen Problem zu. Wir wollen berechnen, auf welcher Stufe *n* und für welche Winkel $\alpha > 90°$ es in den Polygonen $Q_n(\alpha)$ zu Überschneidungen kommt.

Ein neues Koordinatensystem

Für diese Betrachtungen implementieren wir ein neues Koordinatensystem, welches mit dem Polygon $Q_4(\alpha)$ verknüpft ist. Zwischen den Punkten $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$ entsteht für $\alpha > 90°$ eine kleine Lücke, die für die nachfolgenden Betrachtungen wesentlich ist. Daher wird das Achsenkreuz mit dem Ursprung in den Punkt $P_{4,7}$ gelegt und die positive *x*-Achse verläuft durch $P_{4,11}$.

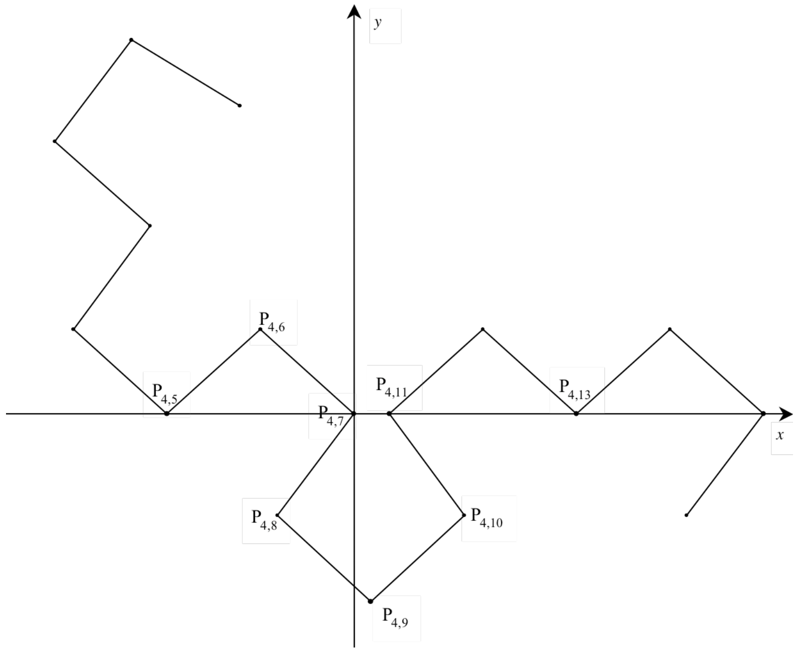


Abb. 9.16: Das Polygon $Q_4(\alpha)$ mit dem neu eingeführten Achsenkreuz

Wir betrachten nun die „Schlaufe“, die zwischen $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$ liegt , also den Polygonabschnitt $P_{4,7}P_{4,8}P_{4,9}P_{4,10}P_{4,11}$. Es ist offensichtlich, dass die Symmetrieachse dieses Abschnittes parallel zur *y*-Achse ist. Im nachfolgenden Bild betrachten wir zunächst einige Winkel.

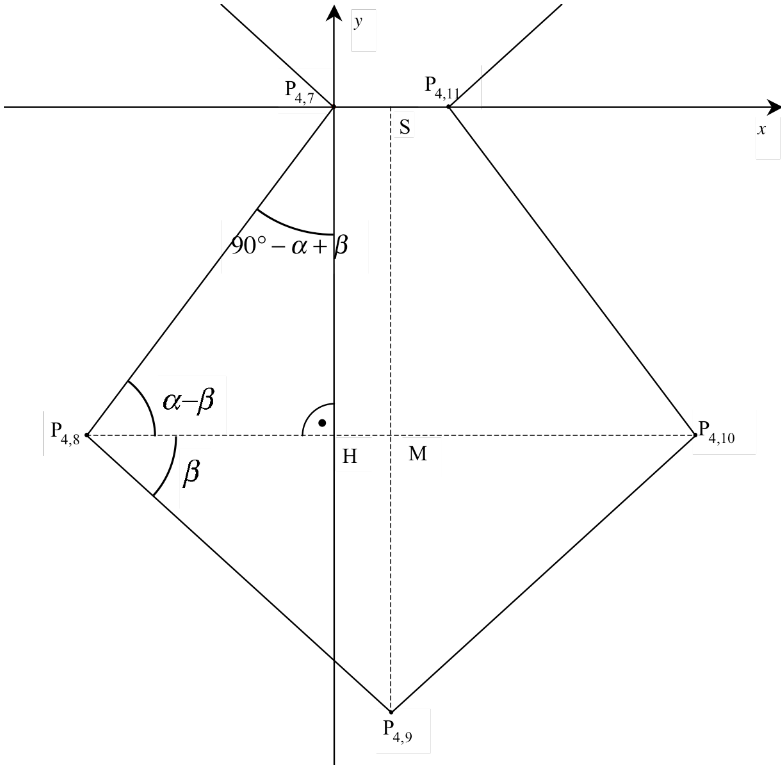


Abb. 9. 17: Einige Winkelgrößen im Polygonabschnitt $P_{4,7}P_{4,8}P_{4,9}P_{4,10}P_{4,11}$

Die wichtigsten Eigenschaften, die wir für die weiteren Betrachtungen benötigen, formulieren wir im nachfolgenden Satz.

Satz 9.3

a. Der Punkt $P_{4,11}$ hat die x-Koordinate $2q^4\left(\cos\beta + \cos 3\beta\right)$,

b. Der Winkel zwischen der negativen *x*-Achse und $\overline{P_{4,7}P_{4,6}}$ hat die Größe *β*.

c. $\left|\sphericalangle P_{4,7}P_{4,11}P_{4,10}\right| = 3\beta$

Beweis

zu a) (siehe Abb. 9.17) Das Dreieck $\triangle P_{4,8}P_{4,9}P_{4,10}$ ist durch Inflation über der Kante $\overline{P_{4,8}P_{4,10}} = \overline{P_{3,4}P_{3,5}}$ entstanden, also ist $\left|\sphericalangle P_{4,9}P_{4,8}P_{4,10}\right| = \beta$. Damit ergeben sich die Winkel im rechtwinkligen Dreieck $\triangle HP_{4,7}P_{4,8}$:

$\left|\sphericalangle HP_{4,8}P_{4,7}\right| = \alpha - \beta$ und $\left|\sphericalangle P_{4,8}P_{4,7}H\right| = 90° - \alpha + \beta$

Die x-Koordinate des Punktes $P_{4,11}$ ergibt sich direkt aus der Strecke $\overline{P_{4,7}P_{4,11}}$.

$\left|P_{4,7}P_{4,11}\right| = 2\left|P_{4,7}S\right| = 2\left(\left|P_{4,8}M\right| - \left|P_{4,8}H\right|\right) = 2\left(q^4\cos\beta - q^4\sin\left(90° - \alpha + \beta\right)\right)$,

da die Kantenlänge des Polygons $Q_4(\alpha)$ laut Definition 9.1 q^4 ist.

$90° - \alpha + \beta$ kann mit $\alpha + 2\beta = 180°$ vereinfacht werden zu $3\beta - 90°$, und mit dem Additionstheorem für den Sinus gilt $\sin\left(90° - \alpha + \beta\right) = \sin\left(3\beta - 90°\right) = -\cos 3\beta$

Damit erhalten wir $\left|P_{4,7}P_{4,11}\right| = 2q^4\left(\cos\beta + \cos 3\beta\right)$

zu b) Der Winkel zwischen der negativen y-Achse und $\overline{P_{4,7}P_{4,8}}$ hat die Größe $90° - \alpha + \beta$, folglich hat der Winkel zwischen der negativen x-Achse und $\overline{P_{4,7}P_{4,8}}$ die Größe $\alpha - \beta$. Da $\left|\sphericalangle P_{4,6}P_{4,7}P_{4,8}\right| = \alpha$, ergibt sich sofort die Behauptung.

zu c) Aus Symmetriegründen ist
$\left|\sphericalangle P_{4,7}P_{4,11}P_{4,10}\right| = \left|\sphericalangle P_{4,8}P_{4,7}P_{4,11}\right| = 90° - \alpha + \beta + 90°$ (siehe Abb. 9.17).
Wegen $\alpha + 2\beta = 180°$ gilt $180 - \alpha + \beta = 3\beta$.

Wir betrachten nun die weitere Entwicklung durch geometrische Inflation um $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$ entsprechend der Erkenntnisse aus Satz 9.2. (siehe dazu Abb. 9.18)

Wegen $\left|\sphericalangle P_{4,7}P_{4,11}P_{4,10}\right| = 3\beta$ folgt sofort, dass $P_{9,351}$ auf der x-Achse liegt für alle $\alpha,\ 90° \le \alpha \le 180°$.

$P_{9,223}$ liegt für $\beta < 45°$ <u>oberhalb</u> der x-Achse. Denn der Winkel zwischen der negativen x-Achse und $\overline{P_{4,7}P_{9,223}}$ ist 4β groß, folglich gilt: $4\beta < 180°$ für alle α, $90° < \alpha \le 180°$.

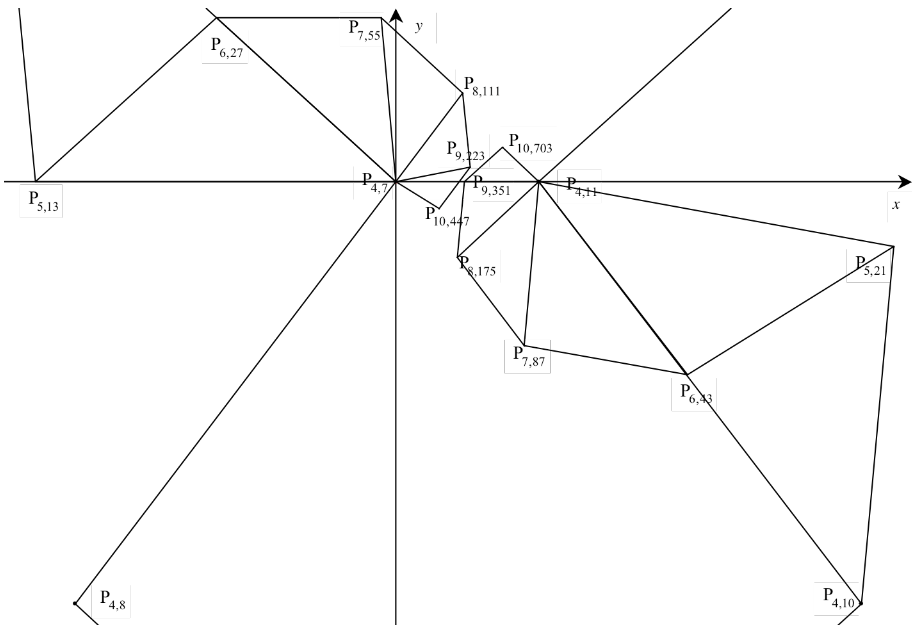


Abb. 9.18: Die Entwicklung um $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$ bis zu Punkten von $Q_{10}(\alpha)$

Aus demselben Grund liegt $P_{10,447}$ <u>unterhalb</u> der x-Achse, denn der Winkel zwischen der negativen x-Achse und $\overline{P_{4,7}P_{10,447}}$ ist 5β groß und $180° < 5\beta < 360° \Leftrightarrow 36° < \beta < 72°$. Das ist der Fall für $90° < \alpha < 108°$. Nach Satz 9.1 ist $P_{9,223} = P_{10,446}$ und daher hat die Kante $\overline{P_{10,446}P_{10,447}} \in Q_{10}(\alpha)$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse für alle $\alpha,\ 90° < \alpha < 108°$. Bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit N und seine x-Koordinate mit x_N und die x-Koordinate von $P_{9,351}$ mit x_P, so kann man die Bedingung für eine Überschneidung im Polygon $Q_{10}(\alpha),\ 90° < \alpha < 108°$ folgendermaßen formulieren:

Die Bedingung für eine Überschneidung

Es kommt im Polygon $Q_{10}(\alpha)$, $90° < \alpha < 108°$ zu einer Überschneidung, wenn die x-Koordinate von N größer ist als die x-Koordinate von $P_{9,351}$, also $x_N > x_P$ gilt. Diese Situation wird in Abb. 9.19 dargestellt.

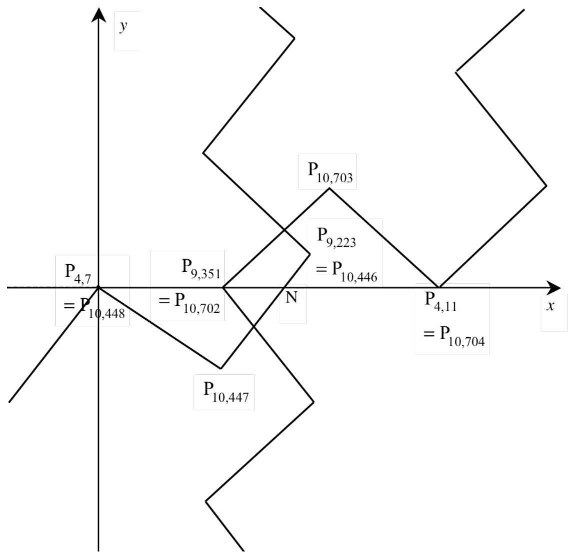


Abb. 9.19: Ausschnitt aus $Q_{10}(\alpha)$ um $P_{4,7} = P_{10,448}$ und $P_{4,11} = P_{10,704}$ für $\alpha = 94{,}5°$

Satz 9.4

Es kommt im Polygon $Q_{10}(\alpha)$ zu einer Überschneidung, wenn $90° < \alpha < 94{,}126°$

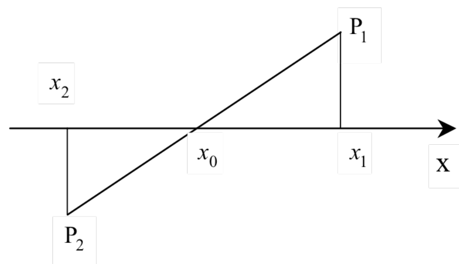
Beweis

Die Nullstelle einer Gerade durch zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ mit $y_1 y_2 < 0$ ist (Ansatz nach dem Strahlensatz)

$$\frac{y_1}{x_1 - x_0} = \frac{-y_2}{x_0 - x_2}$$

$$y_1 x_0 - y_1 x_2 = -x_1 y_2 + x_0 y_2$$

$$x_0 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$



Wir wenden das auf die Gerade $P_{10,446}P_{10,447}$ an. Die Koordinaten der Punkte sind:

$$P_{10,446}\left(q^9 \cos\left(180° - 4\beta\right); q^9 \sin\left(180 - 4\beta\right)\right) \quad \text{mit } q = \frac{1}{2\cos\beta}$$

$$P_{10,447}\left(q^{10} \cos\left(180° - 5\beta\right); q^{10} \sin\left(180 - 5\beta\right)\right)$$

oder nach leichter Umformung der Winkelfunktionen

$$P_{10,446}\left(-q^9 \cos\left(4\beta\right); q^9 \sin\left(4\beta\right)\right) \quad P_{10,447}\left(-q^{10} \cos\left(5\beta\right); q^{10} \sin\left(5\beta\right)\right)$$

Damit ergibt sich für die x-Koordinate x_N des Schnittpunktes N:

$$x_N = \frac{-q^{10}\cos\left(5\beta\right)\cdot q^9 \sin\left(4\beta\right) + q^9 \cos\left(4\beta\right)\cdot q^{10}\sin\left(5\beta\right)}{q^9 \sin\left(4\beta\right) - q^{10}\sin\left(5\beta\right)}$$

$$= q^{10}\frac{\sin\left(5\beta\right)\cos\left(4\beta\right) - \cos\left(5\beta\right)\sin\left(4\beta\right)}{\sin\left(4\beta\right) - q\sin\left(5\beta\right)}$$

Der Zähler lässt sich mit dem Additionstheorem für den Sinus umformen.

$$x_N = q^{10} \frac{\sin\beta}{\sin(4\beta) - q\sin(5\beta)}$$

Der Punkt $P_{9,351}$ liegt um eine Kantenlänge von $Q_9(\alpha)$ links von $P_{4,11}$ auf der x-Achse. Also gilt:

$$x_P = 2q^4\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - q^9 = q^4\left(2\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - q^5\right)$$

Die Bedingung für eine Überschneidung ist $x_P < x_N$, also

$$q^4\left(2\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - q^5\right) < q^{10}\frac{\sin\beta}{\sin(4\beta) - q\sin(5\beta)}$$

$$\frac{2}{q^6}\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - \frac{1}{q} < \frac{\sin\beta}{\sin(4\beta) - q\sin(5\beta)}$$

Das Einsetzen von $q = \frac{1}{2\cos\beta}$ führt zu

$$128\cos^6\beta\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - 2\cos\beta < \frac{\sin\beta}{\sin(4\beta) - \frac{1}{2\cos\beta}\sin(5\beta)}$$

$$64\cos^5\beta\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - 1 < \frac{\sin\beta}{2\cos\beta\sin(4\beta) - \sin(5\beta)}$$

$$64\cos^5\beta\left(\cos\beta + \cos(3\beta)\right) - \frac{\sin\beta}{2\cos\beta\sin(4\beta) - \sin(5\beta)} - 1 < 0$$

Diese Ungleichung werten wir numerisch aus. Der Wert für die linke Seite der Ungleichung wird in der letzten Spalte berechnet.

alpha (Grad)	beta(grad)	beta(rad)	
95,120	42,4400	0,74071773	-0,003268
95,121	42,4395	0,74070901	-0,002795
95,122	42,4390	0,74070028	-0,002322
95,123	42,4385	0,74069155	-0,001849
95,124	42,4380	0,74068283	-0,001376
95,125	42,4375	0,74067410	-0,000903
95,126	42,4370	0,74066537	-0,000430
95,127	42,4365	0,74065665	0,000043
95,128	42,4360	0,74064792	0,000516

Die Ungleichung ist also für $\alpha < 95{,}126°$ (auf drei Stellen genau) erfüllt.

Mit Satz 9.4 haben wir gezeigt, dass es im Polygon $Q_{10}(\alpha)$ zwischen den Punkten $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$ zu einer Überschneidung kommt, wenn $90° < \alpha < 95{,}126°$ ist. Das ist zunächst eine sehr spezielle Aussage, die wir ein wenig erweitern wollen.

Überschneidungen in höheren Stufen der Polygone

In Kapitel 8 hatten wir gesehen, dass jedes Polygon Q_{n+1} über die beiden Abbildungen π_0 und π_1 aus dem Polygon Q_n erzeugt werden kann (Satz 8.5). Dieser Zusammenhang existiert hier auch, natürlich mit entsprechend modifizierten Abbildungen. Die „einfache Schlaufe“ zwischen den Punkten $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$, die im Polygon Q_4 Ausgangspunkt unserer Betrachtungen war, wird in Q_5 einmal abgebildet auf die Schlaufe zwischen $P_{5,7}$ und $P_{5,11}$ und dann auf die Schlaufe zwischen $P_{5,21}$ und $P_{5,25}$. (siehe Abb. 9.20) Der Abbildung ist ebenfalls zu entnehmen, dass zusätzlich eine weitere „einfache Schlaufe“ zwischen den Punkten $P_{5,15}$ und $P_{5,19}$ auftritt. Solche einfachen Schlaufen treten immer dann auf, wenn im zugehörigen Wort drei „L“ oder drei „R“ aufeinander folgen.

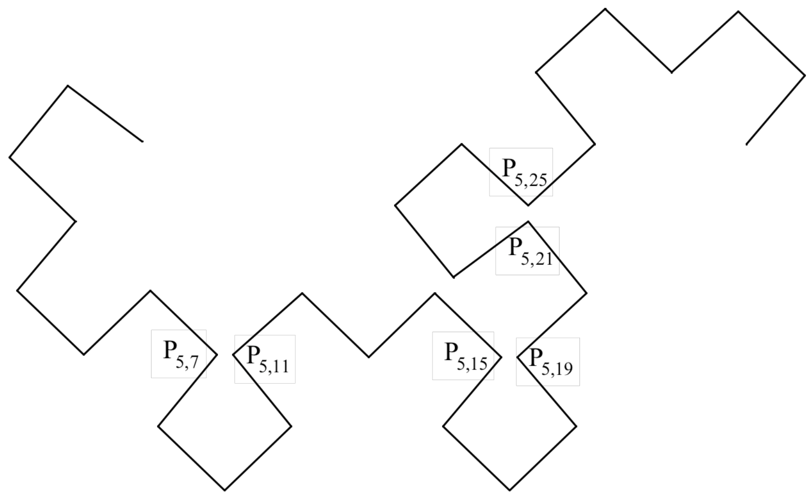


Abb. 9.20: „Einfache Schlaufen“ in $Q_5(94°)$

Wie wir in Satz 9.4 berechnet haben, treten dann 6 Iterationen später an diesen Stellen Überschneidungen auf. Das ist für das oben begonnene Beispiel $Q_{11}(\alpha)$, in dem es für $90° < \alpha < 95{,}126°$ zu drei Überschneidungen dieser Art[3] kommen muss.

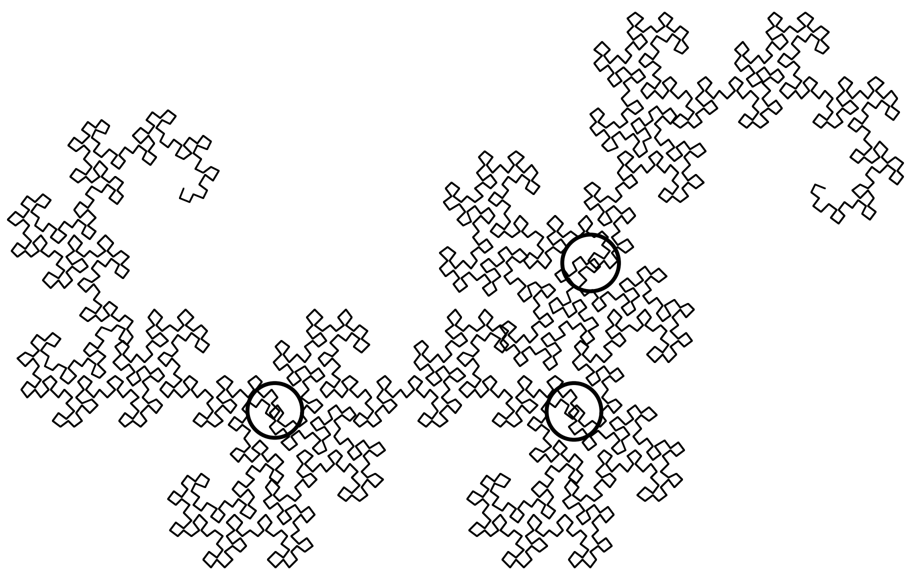


Abb. 9.21: Die zu Satz 9.4 entsprechenden Überschneidungen in $Q_{11}(94°)$

[3] Im Zentrum von Abb. 9.21 erkennt man, dass eine weitere Überschneidung an der Stelle vorkommt, an der in $Q_{10}(94°)$ die erste Überschneidung auftauchte. Das ist jedoch eine Überschneidung, die 7 Iterationen nach der Bildung der „einfachen Schlaufe“ auftaucht und die sich prinzipiell anders verhält. So gibt es Winkel, für die hier keine Überschneidung auftaucht, wohl aber für die Überschneidungen nach Satz 9.4, d.h. 6 Iterationen nach der Bildung der „einfachen Schlaufe“.

Wir sehen also zumindest andeutungsweise, dass die in Satz 9.4 nachgewiesene Überschneidung über die Selbstähnlichkeit an Polygone $Q_n(\alpha),\ n>10$ weitergegeben wird. Daher kommt es in allen Polygonen $Q_n(\alpha),\ n>10$ für $90°<\alpha<95{,}126°$ zu Überschneidungen.

Vergrößerung des Grenzwinkels

Das Ergebnis von Satz 9.4 besagt nicht, dass es für $\alpha>95{,}126°$ nicht mehr zu Überschneidungen kommt. So lässt die Abb. 9.18 die Vermutung zu, dass die weitere Entwicklung von Spiralen um $P_{10,447}$ und $P_{10,702}$ auch für Winkel $\alpha>95{,}126°$ zu Überschneidungen führen können.

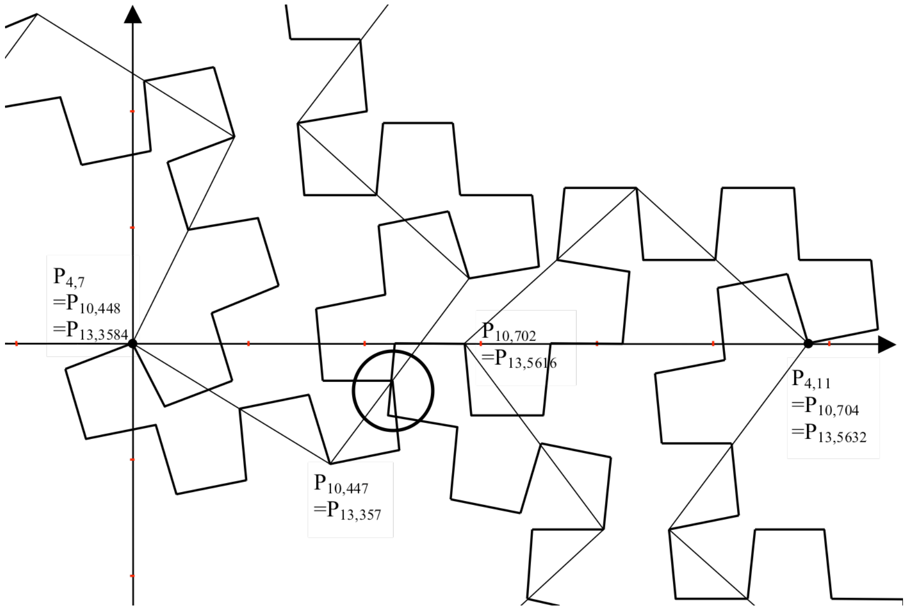


Abb. 9.22: Überschneidungen von Linien von $Q_{13}(95{,}4°)$

So zeigt z.B. Abb. 9.22 Ausschnitte der Polygone $Q_{10}(95{,}4°)$ (dünne Linien) und $Q_{13}(95{,}4°)$ (dicke Linien) um die Punkte $P_{4,7}$ und $P_{4,11}$. Da α über der in Satz 9.4 berechneten Grenze liegt, kommt es für $Q_{10}(95{,}4°)$ nicht mehr zu einer Überschneidung, während das Polygon $Q_{13}(95{,}4°)$ eine Überschneidung aufweist (siehe eingekreiste Stelle). Dieses ist hier nur eine grafische Darstellung, es lässt sich aber durch aufwändige Rechnungen, die im Prinzip denen ähneln, die im Beweis zu Satz 9.4. geführt wurden, exakt nachweisen. So lässt sich die Grenze für α noch ein wenig über 95,126° hinausschieben.

Die unendliche Grenzfigur

Wie in den vorangegangenen Kapiteln wollen wir zum betrachteten Problem einen Blick auf die unendliche Grenzfigur werfen. Genau genommen haben wir diese noch nicht definiert, denn die bisherigen Definitionen und Betrachtungen bezogen sich immer auf einen Auffaltwinkel von 90°. In Analogie zum Kapitel 4, Definitionen 4.4 und 4.5 wollen wir für den Grenzübergang nur die Eckpunkte betrachten und die Grenzfigur (Punktmenge) $Q(\alpha)$ betrachten wir wieder als Abschluss der unendlichen Vereinigung aller Eckpunktmengen.

Definition 9.3

Die Menge aller Eckpunkte des Polygons $Q_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}_0$ wird mit $Q_n^{'}(\alpha)$ bezeichnet.

Definition 9.4

Der Abschluss der Vereinigung aller Eckpunktmengen $Q_n^{'}(\alpha)$ wird mit $Q(\alpha)$ bezeichnet.

$$Q(\alpha) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k^{'}(\alpha)}$$

Satz 9.5

Die Menge $Q(\alpha)$ ist der Grenzwert für die Polygonfolge $\left(Q_n(\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis

Der Beweis dazu verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 4.2, man muss nur den dort verwendeten Skalierungsfaktor von $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ersetzen durch $q = \dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Es kommt mit dieser Definition die Vermutung auf, ob wir hier nicht das „Kind mit dem Bade ausgeschüttet" haben. Schließlich wurden die von uns bisher betrachteten Überschneidungen von den Verbindungslinien zwischen den Eckpunkten verursacht. Diese Verbindungslinien lassen wir aber für die Grenzwertbildung für $Q(\alpha)$ weg. Es ist also zu klären, ob die Grenzfiguren $Q(\alpha)$ zumindest für einige Winkel α Überschneidungen haben oder nicht. Das bedeutet, dass zwei Eckpunkte die gleichen Koordinaten haben, obwohl sie in einem $Q_n^{'}(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Indizes haben. Es könnte auch sein, dass eine Folge von Punkten den gleichen Grenzwert hat, wie eine andere Folge von Punkten, so dass zwar alle Punkte der endlichen Figuren verschieden sind, im Grenzwert die Koordinaten aber übereinstimmen. Da wir jedoch für die erste Art zeigen können, dass Überschneidungen von Eckpunkten bereits in den endlichen Punktmengen vorkommen können, beschränken wir uns auf diesen einfacheren Fall.

Im Anschluss an den Satz 9.3 hatten wir auf Seite 141 festgestellt, dass $\mathrm{P}_{9,351}$ für alle $90° \le \alpha \le 180°$ auf der x-Achse liegt. Gleichzeitig liegt $\mathrm{P}_{4,7}$ immer auf der x-Achse, denn so war diese ja definiert worden. Die x-Koordinate von $\mathrm{P}_{4,7}$ ist immer 0, die x-Koordinate von $\mathrm{P}_{9,351}$ wurde auf Seite 143 berechnet zu

$$x_P = 2q^4\left(\cos\beta + \cos\left(3\beta\right)\right) - q^9 = q^4\left(2\left(\cos\beta + \cos\left(3\beta\right)\right) - q^5\right).$$

Also haben wir zwei Punkte in der Punktmenge $Q_9^{'}(\alpha)$ die gleich sind, wenn der Winkel $\beta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ die Gleichung $x_P = q^4\left(2\left(\cos\beta + \cos\left(3\beta\right)\right) - q^5\right) = 0$ erfüllt. Wegen $q = \dfrac{1}{2\cos\beta} \neq 0$ können wir durch q^4 dividieren und erhalten:

$$2\left(\cos\beta + \cos 3\beta\right) - \frac{1}{32\cos^5\beta} = 0$$

Durch Umformungen, bei denen auch der dreifache Winkel aufgelöst wird, erhalten wir schließlich $256\cos^8\beta - 128\cos^6\beta - 1 = 0$. Dieses Polynom 8. Grades lässt sich näherungsweise mit dem Newton-Verfahren lösen zu $\cos\beta \approx 0,725762$, woraus wir $\beta \approx 43,46°$ bzw. $\alpha \approx 93,06°$ erhalten.

Man kann zeigen, dass es für höhere Stufen noch andere Punkte gibt, die für andere Winkel α genau übereinander liegen.

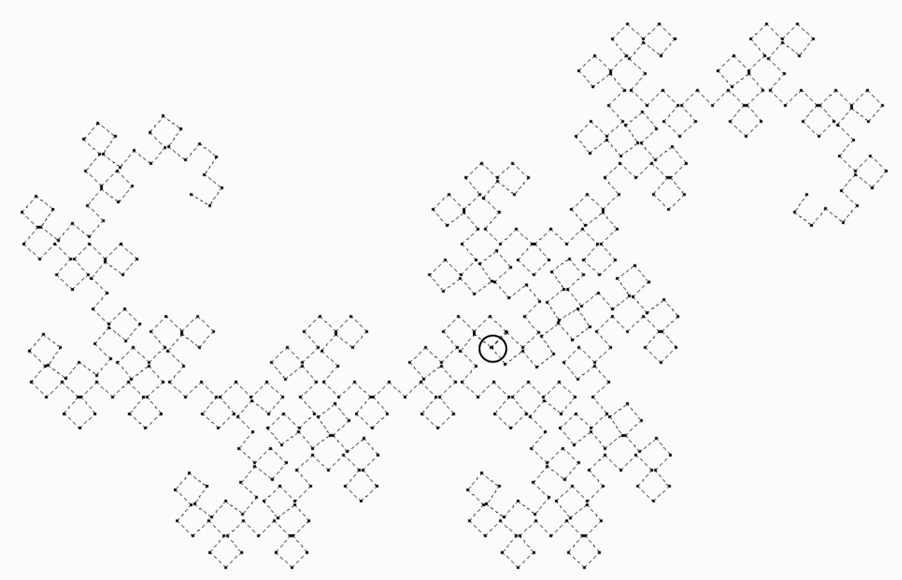


Abb. 9.23: Die Punktmenge $Q_9^{'}(93,06°)$ (Die gestrichelt dargestellten Linien gehören nicht dazu und sind nur zur Orientierung eingezeichnet.) Der Kreis markiert die Stelle, an der die beiden Punkte mit genau gleichen Koordinaten liegen.

Entsprechend den Betrachtungen in den Abb. 9.20 und 9.21 kann man sich nun klar machen, dass durch die Selbstähnlichkeit diese doppelten Punkte in höheren Stufen ebenfalls auftreten und es dann in der Grenzfigur $Q(\alpha)$ unendlich viele doppelte Punkte gibt.

Unterschiedlich starke „Verkrumpelung"

Der variable Winkel α in den Grenzfiguren $Q(\alpha)$ ermöglicht eine Steuerung der „Verkrumpelung" der Grenzfiguren. Diese „Verkrumpelung" kann durch die fraktale Dimension genauer beschrieben werden. Der Begriff der fraktalen Dimension ist schwierig und vielschichtig[4]. Für die Fraktale ist die Hausdorff-Dimension wesentlich, die aber für konkrete Messungen nicht geeignet ist. Daher hat man praktisch handhabbare Dimensionsbegriffe aus der Hausdorff-Dimension entwickelt. Für fraktale Kurven eignet sich die Zirkeldimension, bei selbstähnlichen Figuren die Selbstähnlichkeits-Dimension und für alle in der Ebene konstruierbaren Punktmengen die Boxdimension, die auch auf Gebilde im dreidimensionalen Raum ausgedehnt werden kann.

Da wir es mit $Q(\alpha)$ für alle $90° \le \alpha \le 180°$ mit selbstähnlichen Figuren zu tun haben, werden wir die Selbstähnlichkeits-Dimension verwenden. Analog zu Kapitel 8 können wir nämlich zwei Abbildungen $\pi_{0,\alpha}$ und $\pi_{1,\alpha}$ definieren, so dass jede Grenzfigur $Q(\alpha)$ aus den beiden Bildern bezüglich dieser Abbildungen zusammengesetzt werden kann.

Formal: $Q(\alpha) = \pi_{0,\alpha}\left(Q(\alpha)\right) \cup \pi_{1,\alpha}\left(Q(\alpha)\right)$.

[4] Eine gute, leicht verständliche Darstellung zum Dimensionsbegriff findet man in [M09], Kapitel 4

Die Selbstähnlichkeits-Dimension

Allgemein ist die Selbstähnlichkeits-Dimension definiert über die Anzahl a der Teile, die man benötigt, um die gesamte Figur zu überdecken, und dem Skalierungsfaktor s, mit dem die Teile gegenüber der Gesamtfigur verkleinert wurden. Die Selbstähnlichkeitsdimension D ist dann definiert durch

$$D = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}} .$$

Diese Definition ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn die zur Gesamtfigur ähnlichen Teile sich selbst nicht „wesentlich" überlappen. Wir wollen an einem einfachen Beispiel zeigen, dass anderenfalls der Begriff der Selbstähnlichkeitsdimension unbrauchbar wird.

Wir betrachten das Einheitsquadrat E und vier Abbildungen t_1, t_2, t_3 und t_4, die das Quadrat zuerst mit einer zentrischen Streckung verkleinern mit dem Faktor s, $\frac{1}{2} < s < 1$ und anschließend die verkleinerten Quadrate in eine der vier Ecken schieben.

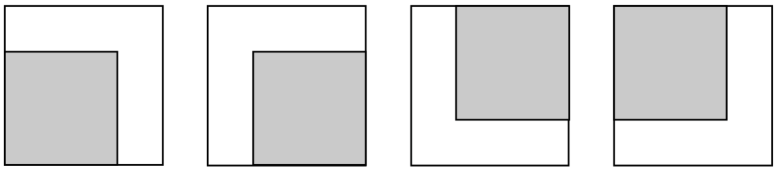


Abb. 9. 24: Darstellung der vier Abbildungen t_1, t_2, t_3 und t_4

Das Einheitsquadrat E ist sicher der Attraktor des zugehörigen IFS für jede Wahl von s aus dem zulässigen Intervall. Hier ist also $a = 4$ und $\frac{1}{2} < s < 1$. Damit ist $D = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{s}} > 2$. Wählt man z.B. $s = 0{,}6$, so ist $D \approx 2{,}714$, für $s = 0{,}8$ ergibt sich $D \approx 6{,}213$. Abgesehen vom unanschaulichen Abweichen von der nahe liegenden Dimension 2 haben wir die widersprüchliche Situation, dass dieser Prozess einer Figur nicht eindeutig eine Selbstähnlichkeitsdimension zuordnet. Das ist natürlich unhaltbar. Zur Vermeidung dieser Vieldeutigkeit hat man die „Offene-Mengen-Bedingung[5]" formuliert. Erfüllt ein Attraktor, in dem sich die Teile überlappen, diese Bedingung, so ist die Berechnung der Selbstähnlichkeitsdimension sinnvoll.

Für die oben betrachteten Grenzfiguren $Q(\alpha)$ ist a stets 2 und den Skalierungsfaktor haben wir zu Beginn dieses Kapitels bestimmt (siehe Abb. 9.8): $s = q = \frac{1}{2\cos\beta}$.

Mit $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$ können wir q direkt auf den Auffaltungswinkel α beziehen: $s = q = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Setzen wir beides in die Definition für die Dimension ein, so erhalten wir:

$$D = \frac{\log 2}{\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

[5] Siehe dazu Barnsley in [M02], S146

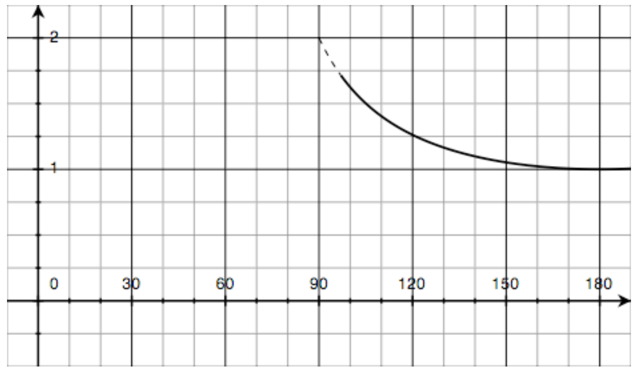


Abb. 9.25: Der Graph zur Abhängigkeit der Dimension D vom Winkel $\alpha \geq 90°$

Abb. 9.25 stellt den funktionalen Zusammenhang grafisch dar. In dem für uns interessanten Bereich von 90° bis 180° sinkt die Dimension von 2 auf 1. Beides stimmt mit unserem üblichen Verständnis von Dimension überein: Für $\alpha = 90°$ haben wir es mit einer flächenfüllenden Kurve zu tun, für $\alpha = 180°$ ist $Q(180°)$ eine einfache, gestreckte Linie, die natürlich die Dimension 1 hat.

Im Bereich $90° < \alpha < 97$ haben wir den Graph nur gestrichelt dargestellt, da es hier zu Überlappungen in der Grenzfigur kommt. Dabei ist die Grenze, ab der es nicht mehr zu Überlappungen kommt, nicht endgültig bestimmt. Weiterhin ist unklar, welchen Einfluss diese Überlappungen auf die Selbstähnlichkeitsdimension haben und ob etwa die „Offene-Mengen-Bedingung“ (s.o.) erfüllt ist. Hier tut sich ein Gebiet für weitere Untersuchungen auf.

Vergleich mit klassischen Fraktalen

Diese kontinuierliche Veränderung der Selbstähnlichkeitsdimension bietet uns nun die Möglichkeit, einige berühmte, selbstähnliche Fraktale mit den Grenzfiguren $Q(\alpha)$ zu vergleichen, die dieselbe Dimension haben. Dazu wählen wir die Koch-Kurve und die Sierpinski-Pfeilspitze und bestimmen zu ihnen die Grenzfiguren $Q(\alpha)$, genauer den Winkel α, die dieselbe Dimension haben.

a) Die Koch-Kurve

Die Koch-Kurve (siehe Abb. 9.26) setzt sich aus 4 Kopien zusammen, die jeweils um den Faktor $\frac{1}{3}$ gestaucht sind.

Damit hat die Koch-Kurve eine Dimension von $D = \dfrac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}262$.

Für die Berechnung des passenden Auffaltungswinkels α ergibt sich:

$$\frac{\log 2}{\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{2\log 2}{\log 3}$$

Hier müssen wir letztlich die Nenner vergleichen:

$$\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\log 3 = \log\sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\frac{\alpha}{2} = 60°$$
$$\alpha = 120°$$

Dieses Ergebnis wird auch recht gut durch den Funktionsgraph in Abb. 9.25 bestätigt.

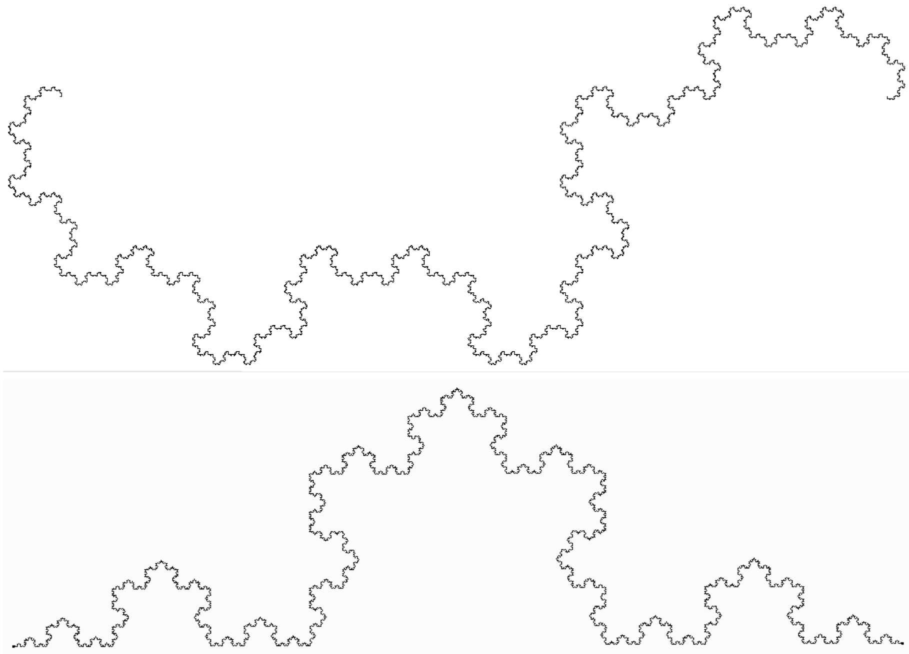


Abb. 9.26: Die Papierfaltungskurve $Q(120°)$ (oben) und die Koch-Kurve (unten). Beide Kurven haben die gleiche Selbstähnlichkeits-Dimension.

Der iterative Erzeugungsprozess ist sehr ähnlich

Beide Kurven sind sich rein visuell sehr ähnlich. Dafür ist allerdings nicht nur die gleiche Selbstähnlichkeits-Dimension verantwortlich, wie das nachfolgende Beispiel zeigt. Vielmehr lässt sich der Erzeugungsprozess der Koch-Kurve auch so darstellen, dass er direkt dem der Papierfaltungskurve entspricht.

Dazu stellen wir den iterativen Erzeugungsprozess dar über das Paar Initiator-Generator. In jedem Schritt wird der Initiator durch den Generator ersetzt. Da es dabei auf eine Orientierung ankommt, werden die Strecken durch Pfeile dargestellt.

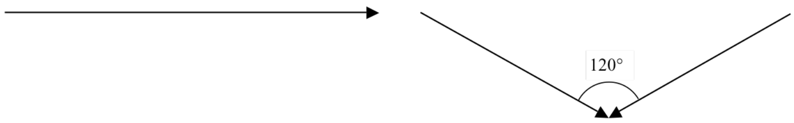


Abb. 9.27: Initiator und Generator für $Q(120°)$

Für die Koch-Kurve kann man nun, abweichend von der üblichen Darstellung, eine ähnliche Konstruktion angeben.

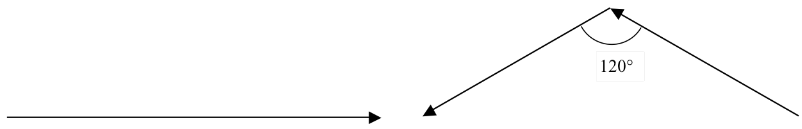


Abb. 9.28: Initiator und Generator für die Koch-Kurve

Die Stufen der Koch-Kurve erhält man mit diesem Initiator-Generator-Paar, wenn man sie stets zwei Mal hintereinander anwendet.

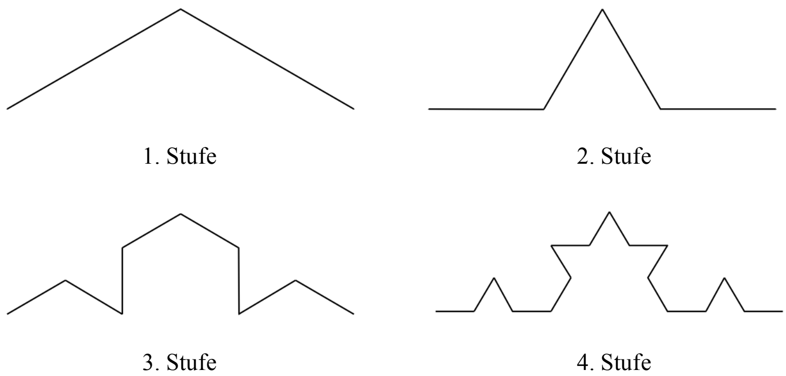


Abb. 9.29: Die ersten vier Stufen der durch das Initiator-Generator-Paar aus Abb. 9.28 erzeugten Kurve

Wie man der Abb. 9.29 entnehmen kann, wird so mit jeder zweiten Stufe eine weitere Stufe der Kochkurve erzeugt. Die unmittelbare Verwandtschaft der Initiator-Generator-Paare ist also die Ursache für die hohe visuelle Ähnlichkeit von $Q(120°)$ und der Koch-Kurve und die gleiche fraktale Dimension eine Folge davon.

Das nächste Beispiel soll zeigen, dass die gleiche fraktale Dimension allein nicht dafür sorgt, dass die verglichenen Fraktale ähnlich aussehen.

b) Das Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck ist der Grenzwert verschiedener Prozesse. Am besten reiht sich dieses Fraktal in unsere Betrachtungen ein, wenn wir es als Grenzfigur der Kurven betrachten, die als Sierpinski-Pfeilspitze bekannt sind. (Eine nähere Betrachtung zu dieser Kurve findet in Kapitel 10 statt.) Für eine erste Orientierung dient Abb. 9.30, die die vierte Stufe der Sierpinski-Pfeilspitze darstellt.

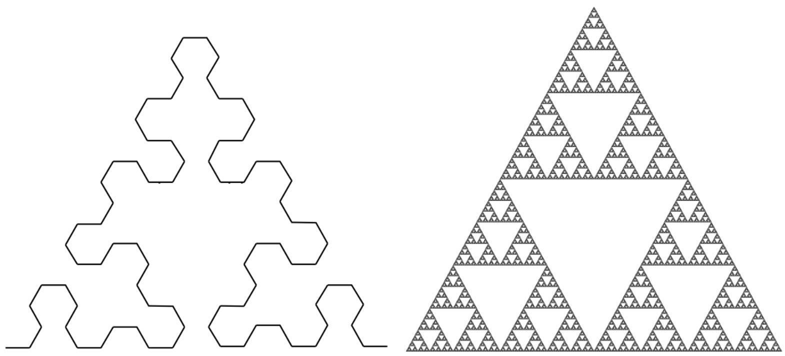


Abb. 9.30: Die 4. Stufe der Sierpinski-Pfeilspitze und das Sierpinski-Dreieck als dessen Grenzfigur

Zur Berechnung der Selbstähnlichkeits-Dimension stellen wir fest, dass sich das Sierpinski-Dreieck durch a = 3 Kopien von sich selbst rekonstruieren lässt, die um den Faktor $s = \frac{1}{2}$ verkleinert wurden. Die Berechnung der Dimension liefert dann:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}585$$

Für die Berechnung des Auffaltwinkels α für die Grenzfigur $Q(\alpha)$, die dieselbe Dimension hat, müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$\frac{\log 2}{\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Hier sind geschickte Umformungen nicht möglich, wir lösen direkt auf, wobei wir mit dem Logarithmus zur Basis 10 rechnen.

$$\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(\log 2)^2}{\log 3}$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = 10^{\frac{(\log 2)^2}{\log 3}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot 10^{\frac{(\log 2)^2}{\log 3}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{\frac{(\log 2)^2}{\log 3}}\right)$$

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{\frac{(\log 2)^2}{\log 3}}\right) \quad \text{also} \quad \alpha \approx 101{,}5°$$

Auch dieses Ergebnis lässt sich wieder in Abb. 9.25 bestätigen.

Die gleiche fraktale Dimension sichert nicht ein ähnliches Aussehen

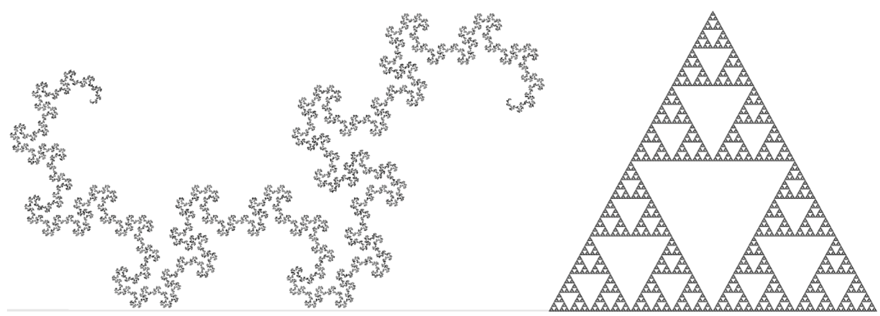


Abb. 9.31: Die Grenzfigur $Q(101{,}5°)$ und das Sierpinski-Dreieck, die beide die gleiche Selbstähnlichkeits-Dimension haben

Der visuelle Vergleich von $Q(101{,}5°)$ und dem Sierpinski-Dreieck zeigt die Grenzen der Vergleiche über die Dimension. Obwohl beide Figuren in dieser charakteristischen Zahl übereinstimmen, haben sie ein deutlich verschiedenes Aussehen.