

8 Iterierte Funktionensysteme und Selbstähnlichkeit

Abbildungen In diesem Kapitel werden wir wieder die geometrische Betrachtung in den Vordergrund stellen und zwar dieses Mal unter Betonung des abbildungsgeometrischen Aspektes. Das liegt nahe, da beim Papierfalten jeder Auffaltungsvorgang mit einer Drehung, also Kongruenzabbildung, verbunden ist. Der Zusammenhang zwischen den Papierfaltungspolygonen R_n (Def. 4.1) und den Polygonen Q_n (Def. 4.2) zur geometrischen Betrachtung des Inflationsgesetzes besteht über eine Ähnlichkeitsabbildung. Einen weiteren Hinweis darauf, dass abbildungsgeometrische Betrachtungen für die Polygone hilfreich sein könnten, entnehmen wir dem Reflexionsgesetz. Danach lässt sich jedes Wort w_n in zwei Teile zerlegen, die in gewisser Weise „symmetrisch“ sind. Nach dem zu Beginn des Kapitels 2 betrachteten Auffaltvorgang und dem daraus resultierenden Reflexionsgesetz ist die zweite Hälfte kongruent zur ersten und die Kongruenzabbildung ist eine Drehung um den mittleren Punkt.

Die Polygone bestehen aus zwei Teilen Für eine erste Annäherung an unsere neue Betrachtungsweise stellen wir die Polygone Q_3 bis Q_8 so dar, dass die beiden Hälften erkennbar sind.

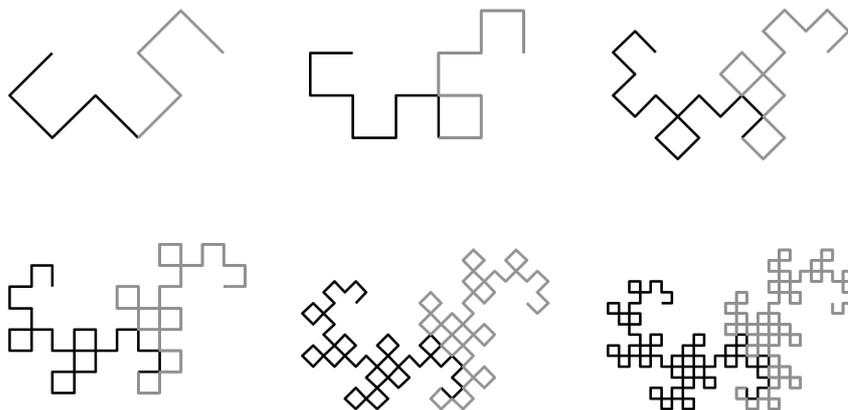


Abb. 8.1: Die Polygone Q_3 bis Q_8 . Die erste Hälfte ist schwarz, die zweite grau dargestellt.

In Abb. 8.1 erkennen wir deutlich, dass die zweite Hälfte eines Polygons die erste Hälfte, gedreht um 90° im Uhrzeigersinn, ist. Beide Teilpolygone stoßen in der Mitte zusammen, das ist der Punkt $P_{1,1}$ ¹. Die erste Hälfte ist also immer ein Polygon vom Punkt $P_{1,0} = P_{0,0}$ zum Punkt $P_{1,1}$. Die zweite Hälfte verläuft vom Punkt $P_{1,1}$ zum Punkt $P_{1,2} = P_{0,1}$. Berücksichtigt man eine Orientierung der Polygone und die Tatsache, dass die erste Hälfte durch Drehung um den Punkt $P_{1,1}$ auf die zweite abgebildet werden kann, so sind die folgenden beiden Abbildungen für unsere nächsten Betrachtungen maßgeblich.

¹ Die Bezeichnung der Punkte durch doppelte Indizes wurde im Kapitel 4, Definition 4.3 eingeführt.

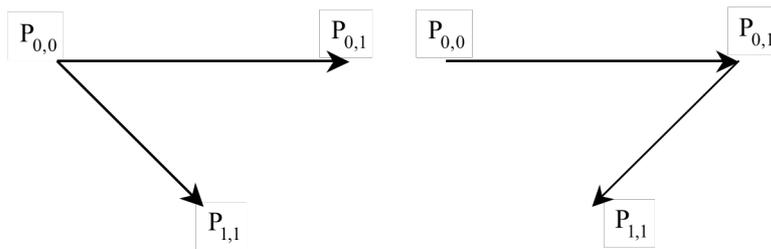


Abb. 8.2: Die beiden Abbildungen, dargestellt an der Strecke $\overline{P_{0,0}P_{0,1}}$

Die beiden Abbildungen Die erste Abbildung dreht die orientierte Grundstrecke $\overline{P_{0,0}P_{0,1}}$ um 45° im Uhrzeigersinn und staucht sie mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ auf die orientierte Strecke $\overline{P_{0,0}P_{1,1}}$. Die zweite Abbildung dreht die orientierte Grundstrecke $\overline{P_{0,0}P_{0,1}}$ um 135° im Uhrzeigersinn, staucht sie mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und verschiebt dann den Anfangspunkt um 1 nach rechts in den Punkt $P_{0,1}$. Das Bild ist die orientierte Strecke $\overline{P_{0,1}P_{1,1}}$.

In der Matrixschreibweise aufgeschrieben erhalten wir:

Definition 8.1

Die Abbildung π_0 ist gegeben durch

$$\pi_0 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} \end{cases}$$

Die Abbildung π_1 ist gegeben durch

$$\pi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Hat man sich klar gemacht, dass diese beiden Abbildungen die Folge der Q_n (Def. 4.2) erzeugen, so kann man mit der ausgearbeiteten Theorie der iterierten Funktionensysteme (IFS) zeigen, dass die Folge der Q_n einen Grenzwert besitzt und dieser der Highway-Dragon ist. Ich möchte hier diesen Weg kurz skizzieren.

Wir folgen dabei im Wesentlichen den Darstellungen Barnsleys in [M02] (vgl. auch Christiansen in [M03]).

Dieser definiert zunächst, was ein IFS ist.

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und π_1 bis π_n eine Menge von endlich vielen Kontraktionen auf X , die jeweils die Kontraktions-Faktoren s_n besitzen. Ein iteriertes Funktionensystem ist dann der metrische Raum, zusammen mit den n Kontraktionen.

In unserem konkreten Fall ist X die Ebene \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik und die Kontraktionen sind die in Definition 8.1 genannten Abbildungen π_1 und π_2 . Beide haben den Kontraktions-Faktor $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Das IFS-Theorem besagt dann:

Ist $H(X)$ die Menge aller kompakten, nicht leeren Teilmengen von X , so ist $H(X)$ ein vollständiger, metrischer Raum mit der Hausdorff-Metrik und $\Pi: \begin{cases} H(X) \rightarrow H(X) \\ A \mapsto \bigcup_{i=1}^n \pi_i(A) \end{cases}$

eine Kontraktion auf $H(X)$ mit dem Kontraktions-Faktor $s = \max\{s_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktprinzips (siehe Kapitel 3, Seite 44 ff) erfüllt und es gelten dessen Folgerungen: Die Kontraktion Π hat genau einen Fixpunkt und man erhält ihn als Grenzwert der Folge $(\Pi^n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$.

In unserem speziellen Fall ist $H(X)$ die Menge aller kompakten, nicht leeren Teilmengen der Ebene und $\Pi(A) = \pi_1(A) \cup \pi_2(A)$ für eine beliebige Menge A aus $H(X)$. Starten wir mit dem Polygon Q_0 , also der Strecke von $P_{0,0} = (0;0)$ nach $P_{0,1} = (1;0)$, so durchläuft die Folge $(\Pi^n(Q_0))_{n \in \mathbb{N}}$ gerade die Polygone Q_n . Das wird in Satz 8.5 bewiesen. Damit ist klar, dass der Fixpunkt des Operators Π die Menge Q ist, der Abschluss der Vereinigung aller Polygoneckpunkte (siehe Definition 4.5).

Wir kehren nun zu den in Definition 8.1 eingeführten Abbildungen π_0 und π_1 zurück. Für die weiteren Betrachtungen sind einige grundlegende Eigenschaften der beiden Abbildungen wesentlich.

Satz 8.1

Es seien A und B zwei Punkte der Ebene.

a) Ist $A' = \pi_0(A)$ und $B' = \pi_0(B)$, so gilt:

$$|A'B'| = \frac{1}{2} \sqrt{2} |AB| \text{ und } \left| \angle \overline{AB}, \overline{A'B'} \right| = -\frac{\pi}{4}$$

b) Ist $A'' = \pi_1(A)$ und $B'' = \pi_1(B)$, so gilt:

$$|A''B''| = \frac{1}{2} \sqrt{2} |AB| \text{ und } \left| \angle \overline{AB}, \overline{A''B''} \right| = -\frac{3\pi}{4}$$

Beweis

Da sowohl π_0 als auch π_1 aus einer Drehung und einer Streckung mit dem Streckfaktor $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ zusammengesetzt sind, ist das Verhältnis von Bild- zur Urstrecke gleich $\frac{1}{2} \sqrt{2}$.

Wir zeigen zunächst in der Abb. 8.3, dass der Winkel ξ zwischen den beiden Geraden AB und A'B' gleich dem Drehwinkel δ ist.

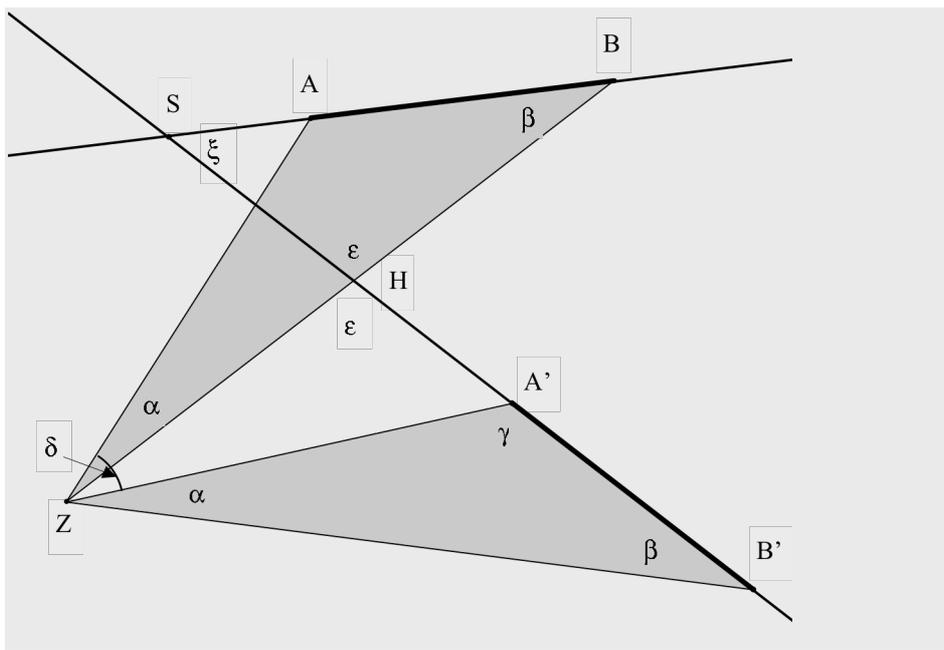


Abb. 8.3: Die Strecke \overline{AB} ist um Z um den Winkel δ gedreht

Im Dreieck ZAH gilt nach der Winkelsumme $(\delta - \alpha) + (180^\circ - \gamma) + \epsilon = 180^\circ$. Aufgelöst nach ϵ ergibt sich $\epsilon = \gamma + \alpha - \delta$. Im Dreieck HBS ist die Winkelsumme $\epsilon + \beta + \xi = 180^\circ$. Mit dem letzten Ergebnis für ϵ folgt $\gamma + \alpha - \delta + \beta + \xi = 180^\circ$. Beachtet man nun, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, so erhält man $\xi = \delta$.

Daraus folgt aber sofort, dass unter der Abbildung π_0 der Winkel zwischen Ur- und Bildstrecke $-\frac{\pi}{4}$ betragen muss und unter π_1 beträgt er $-\frac{3\pi}{4}$.

Folgerung

$$\left| \angle \overline{A'B'}, \overline{A''B''} \right| = -\frac{\pi}{2}$$

Zwischen den beiden Abbildungen π_0 und π_1 besteht folgender Zusammenhang.

Satz 8.2

$$\pi_1(\vec{x}) = D_{270} \cdot \pi_0(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } D_{270} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Drehmatrix für die Drehung um } \frac{3\pi}{2}$$

um den Ursprung.

Beweis

Wir müssen nur die rechte Seite der behaupteten Gleichung ausrechnen.

$$D_{270} \cdot \pi_0(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun sind wir so weit, dass wir die beiden Abbildungen π_0 und π_1 auf die Polygone Q_n anwenden können um letztlich zu zeigen, was wir in Abb. 8.1 schon angedeutet haben, nämlich dass sich die $n+1$ -te Stufe der Polygone zusammensetzen lässt aus den beiden Bildern bezüglich π_0 und π_1 des Polygons der n -ten Stufe.

kongruente Abschnitte in den Polygonen Die Definition der Wörter w_n (Definition 2.3) und die Definition der Polygone Q_n in Definition 4.2 legen anschaulich nahe, dass ein Polygon vom Anfang, also vom Start

Zusammenhänge zwischen beiden Abbildungen

im Ursprung durchlaufen, und vom Ende, also vom Endpunkt in (1;0) rückwärts durchlaufen, gleich aussieht.

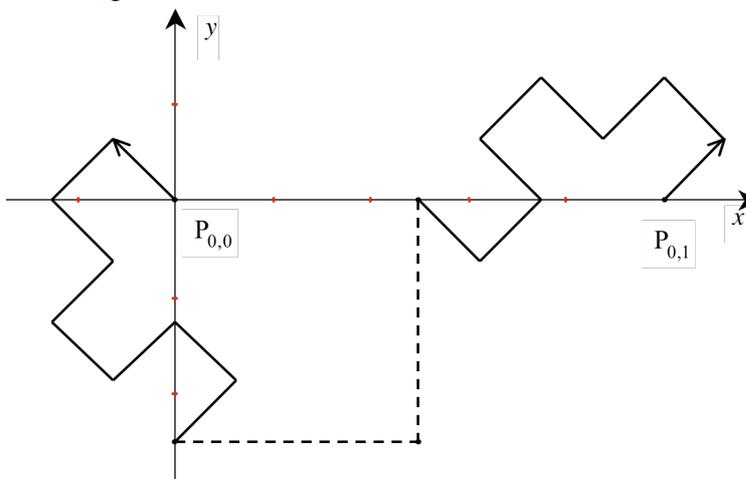


Abb. 8.4: Anfang und Ende eines Polygons Q_n

Etwas genauer heißt das, dass der Anfang kongruent auf das Ende abgebildet werden kann. Neben einer Verschiebung ist eine Drehung um den Ursprung um 90° im Uhrzeigersinn erforderlich.

Satz 8.3

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0, k < 2^{n-1}$ gilt: $\left| \angle \overrightarrow{P_{n,k} P_{n,k+1}}, \overrightarrow{P_{n,2^n-k} P_{n,2^n-k-1}} \right| = \frac{3\pi}{2}$

Beweis

Nach Definition 4.2 werden die Winkel zwischen den Kanten eines Polygons Q_n definiert durch die Symbole des Wortes w_n . Jedes „L“ bewirkt eine Drehung um $+\frac{\pi}{2}$, jedes „R“ eine Drehung um $-\frac{\pi}{2}$. In jedem Wort w_n ist die Anzahl der „L“ um 1 größer als die Anzahl der „R“ (Satz 2.1). Startet man im Punkt $P_{n,k}$ mit der gerichteten Kante $\overrightarrow{P_{n,k} P_{n,k+1}}$ und läuft bis zur gerichteten Kante $\overrightarrow{P_{n,2^n-k} P_{n,2^n-k-1}}$, so bestimmen die Symbole vom Platz k bis zum Platz $2^n - k$ die Drehungen.

$$\underbrace{L L \dots R L L}_{k-1} \underbrace{R R \dots L L}_{k-1} \underbrace{L L \dots R R}_{k-1} \underbrace{R L \dots R R}_{k-1}$$

Man hat also zu Beginn des Wortes die ersten $k-1$ Symbole ausgelassen, am Ende die letzten $k-1$. Nach dem Reflexionsgesetz gehört zu jedem Symbol auf dem Platz $i, i = 1, \dots, k-1$ das entgegen gesetzte Symbol auf dem Platz $2^n - i$. Aus unseren ersten Betrachtungen im Kapitel 2 wissen wir, dass die Anzahl der „L“ um eins größer ist als die Anzahl der „R“. Also ist auch bei dieser symmetrischen Teilauswahl vom Index k bis $2^n - k$ die Anzahl der „L“ stets um 1 größer als die Anzahl der „R“. Folglich ist der Winkel von der gerichteten Kante $\overrightarrow{P_{n,k} P_{n,k+1}}$ zur gerichteten Kante $\overrightarrow{P_{n,2^n-k} P_{n,2^n-k-1}}$ gleich $+\frac{\pi}{2}$. Nun steht in der Behauptung die gerichtete Kante

$\overline{P_{n,2^n-k} P_{n,2^n-k-1}}$, die zur Kante $\overline{P_{n,2^n-k-1} P_{n,2^n-k}}$ entgegengesetzt verläuft, also um π gedreht ist. Somit ergibt sich der behauptete Winkel von $\frac{3\pi}{2}$.

Aus unseren ersten Beobachtungen an den gefalteten Papierstreifen wissen wir, dass ein Streifen vor dem letzten Aufklappen so aussieht wie der geknickte Streifen auf der Stufe vorher (siehe Abb. 2.1). Ein gefalteter Streifen besteht daher aus zwei Hälften, die jeweils die Stufe davor darstellen.

ähnliche Polygone Diese Gesetzmäßigkeit ist die Grundlage des Reflexionsgesetzes und des iterativen Baus der Wörter w_n .

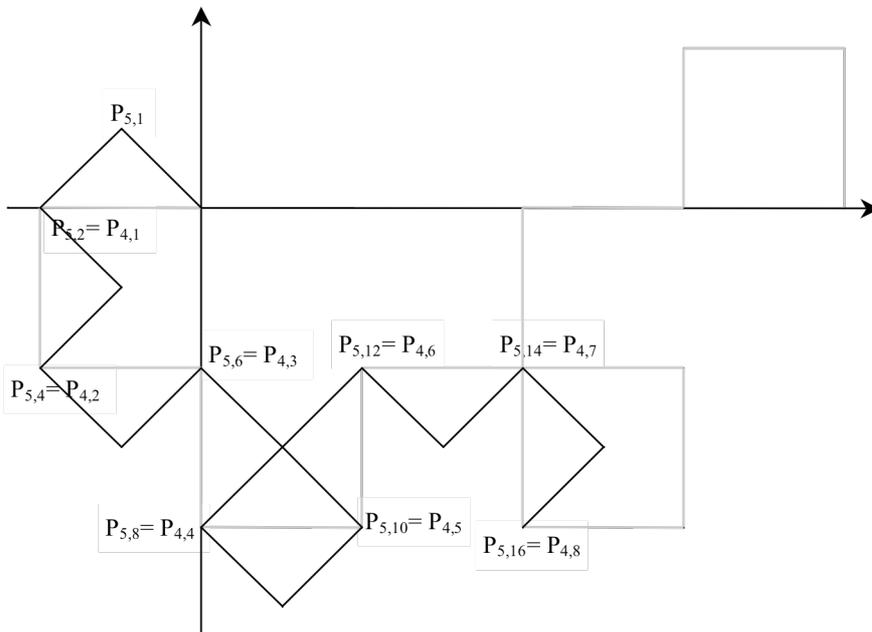


Abb. 8. 5: Das Polygon Q_4 (grau) und die erste Hälfte des Polygons Q_5 (schwarz)

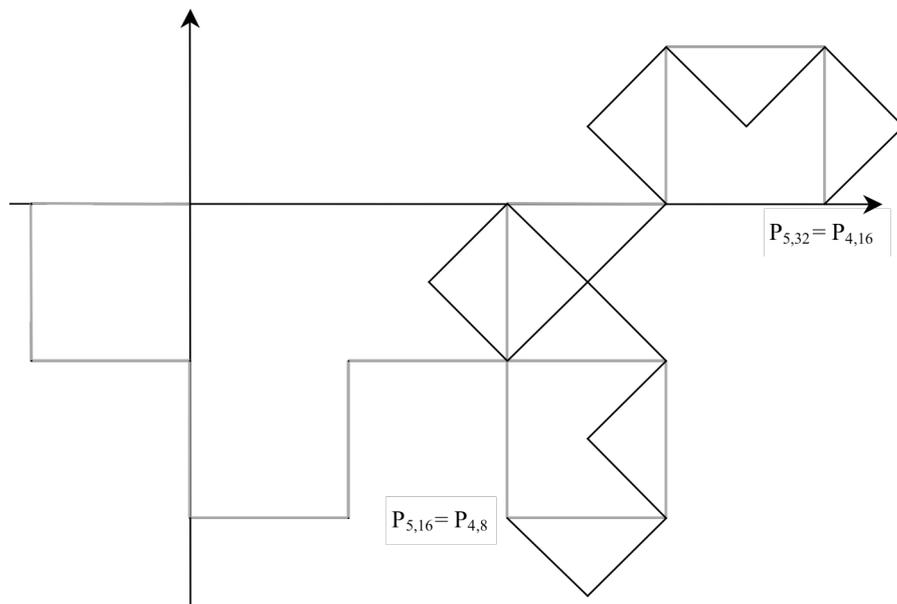


Abb. 8. 6: Das Polygon Q_4 (grau) und die zweite Hälfte des Polygons Q_5 (schwarz)

In den Abbildungen 8.5 und 8.6 kann man erkennen, dass dieses Bauprinzip auch für die Polygone Q_n gilt. Ein Polygon Q_{n+1} besteht aus zwei verkleinerten Kopien des vorhergehenden Polygons Q_n .

Diese anschauliche Feststellung über den Bau der Polygone Q_n können wir nun mit Hilfe der Abbildungen π_0 und π_1 formulieren. Das geschieht im Satz 8.5. Der Satz 8.4 bereitet diesen vor .

Abbildung der Polygonpunkte

Satz 8.4

Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq 2^n$ gilt: $\pi_0(P_{n,k}) = P_{n+1,k}$ und $\pi_1(P_{n,k}) = P_{n+1,2^{n+1}-k}$

Beweis

Für die nachfolgenden Rechnungen identifizieren wir einen Punkt P mit seinem Ortsvektor. Es gilt also hier speziell $P_{n,k} = \overrightarrow{P_{0,0}P_{n,k}}$

1. Teil: $\pi_0(P_{n,k}) = P_{n+1,k}$

Der Ortsvektor zu einem Punkt ist die Summe der einzelnen Kantenvektoren.

$$\overrightarrow{P_{0,0}P_{n,k}} = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_0(P_{n,k}) &= \pi_0(\overrightarrow{P_{0,0}P_{n,k}}) = \pi_0\left(\sum_{i=1}^k \overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \pi_0(\overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}), \text{ da } \pi_0 \text{ keinen Translationsvektor enthält} \end{aligned}$$

Nach Satz 8.1 a) sind die Bilder der Vektoren $\overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}$ um den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ verkürzt

und um $-\frac{\pi}{4}$ gegen das Urbild verdreht. Diese Eigenschaften haben nach der Definition

der Polygone Q_n in Definition 4.2 auch die Kantenvektoren des Polygons Q_{n+1} , so dass

gilt: $\pi_0(\overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}) = \overrightarrow{P_{n+1,i-1}P_{n+1,i}}$

Folglich gilt

$$\pi_0(P_{n,k}) = \sum_{i=1}^k \pi_0(\overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}) = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{P_{n+1,i-1}P_{n+1,i}} = \overrightarrow{P_{0,0}P_{n+1,k}} = P_{n+1,k}$$

2. Teil: $\pi_1(P_{n,k}) = P_{n+1,2^{n+1}-k}$

Analog zu Teil 1 gilt:

$$\begin{aligned} \pi_1(P_{n,k}) &= \pi_1(\overrightarrow{P_{0,0}P_{n,k}}) = \pi_1\left(\sum_{i=1}^k \overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}\right) \\ &= D_{270} \cdot \pi_0\left(\sum_{i=1}^k \overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nach Satz 8.2} \\ &= D_{270} \cdot \sum_{i=1}^k \pi_0(\overrightarrow{P_{n,i-1}P_{n,i}}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= D_{270} \cdot \sum_{i=1}^k \overrightarrow{P_{n+1,i-1}P_{n+1,i}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nach Teil 1} \\ &= \sum_{i=1}^k \left(D_{270} \cdot \overrightarrow{P_{n+1,i-1}P_{n+1,i}} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

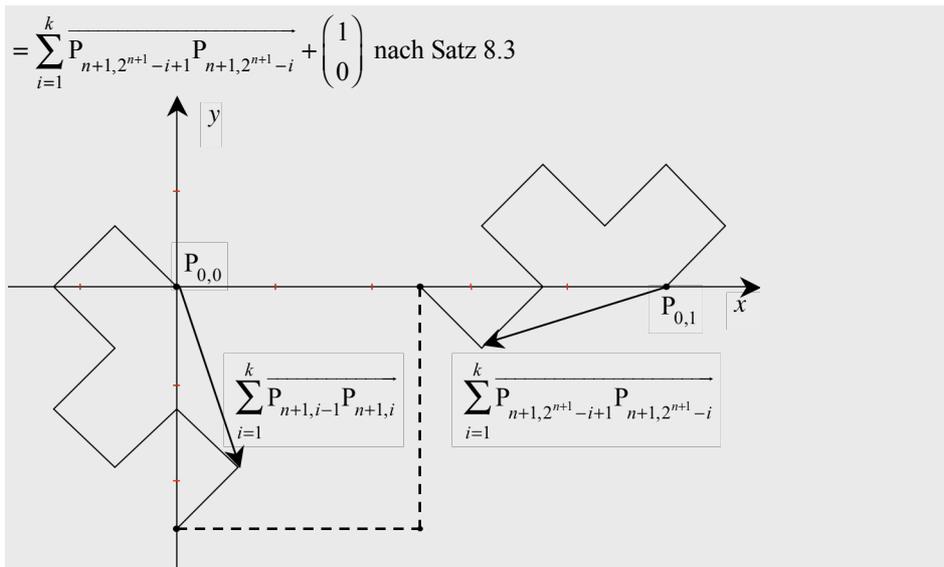


Abb. 8. 7: Summe der Kantenvektoren am Anfang und am Ende eines Polygons Q_{n+1}

Die Kantenvektoren in der letzten Summe sind gegen unseren üblichen Durchlaufsinne gerichtet, nämlich vom Index $2^{n+1} - i + 1$ zum Vorgängerindex $2^{n+1} - i$. Wegen des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beginnt die Vektorkette im Punkt $(1;0) = P_{0,1} = P_{n+1,2^{n+1}}$. Das Polygon Q_{n+1} wird also rückwärts durchlaufen bis zum Punkt $P_{n+1,2^{n+1}-k}$. Folglich ist

$$\pi_1(P_{n,k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{P_{n+1,2^{n+1}} P_{n+1,k}} = \overrightarrow{P_{0,0} P_{n+1,k}} = P_{n+1,k}$$

Anmerkung

Insbesondere für $k = 2^n$ erhält man $\pi_0(P_{n,2^n}) = P_{n+1,2^n}$ und $\pi_1(P_{n,2^n}) = P_{n+1,2^n}$, also $\pi_0(P_{n,2^n}) = \pi_1(P_{n,2^n}) = P_{n+1,2^n}$. Der mittlere Punkt $P_{n+1,2^n} = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ ist also das Bild des Endpunktes $P_{n,2^n} = (1;0)$ des Polynoms Q_n bezüglich π_0 als auch π_1 .

Unmittelbar aus Satz 8.4 folgt nun der zentrale Satz.

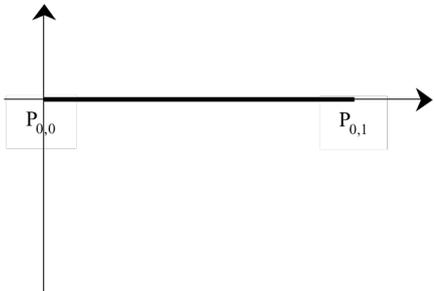
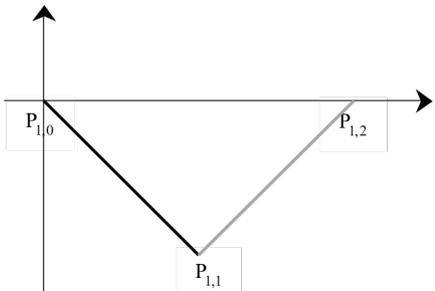
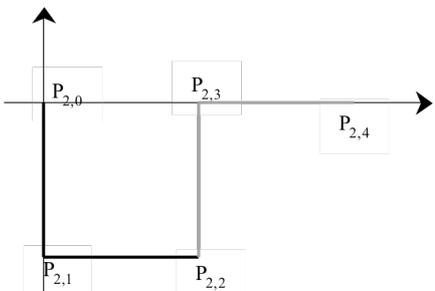
Satz 8.5

Abbildung der Polygone Für jedes Polygon $Q_n, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $Q_{n+1} = \pi_0(Q_n) \cup \pi_1(Q_n)$

Beweis

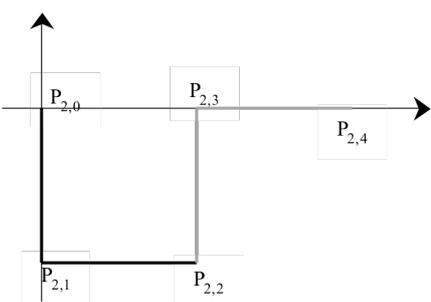
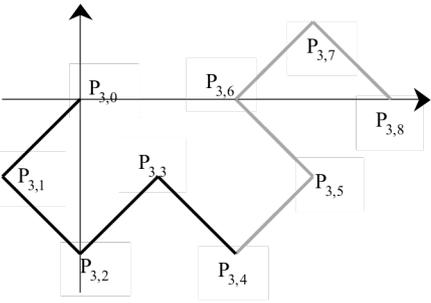
Nach Satz 8.4 werden die Punkte $P_{n,k}, k=0, \dots, 2^n$ durch π_0 abgebildet auf die Punkte $P_{n+1,k}$ des Polygons Q_{n+1} . Da π_0 eine affine Abbildung ist, werden die Verbindungsstrecken von Q_n abgebildet auf die Verbindungsstrecken von Q_{n+1} . Entsprechend wird Q_n durch π_1 auf die zweite Hälfte des Polygons Q_{n+1} abgebildet, also auf die Punkte $P_{n+1,k}, k=2^n, \dots, 2^{n+1}$ und ebenso die Verbindungsstrecken von Q_n auf die zugehörigen Verbindungsstrecken von Q_{n+1} . Da nach der Anmerkung zu Satz 8.4 die Bilder des Endpunktes $P_{n,2^n}$ unter π_0 und unter π_1 auf denselben Bildpunkt abgebildet werden, $\pi_0(P_{n,2^n}) = \pi_1(P_{n,2^n}) = P_{n+1,2^n}$, schließen auch beide Bildpolygone lückenlos aneinander.

iterierte Abbildung von Eckpunkten Startet man für eine schrittweise Anwendung des Satzes 8.5 mit dem Polygon Q_0 und beachtet dabei, dass $P_{0,1} = \pi_1(P_{0,0})$, so ist jeder Eckpunkt in einem Polygon Q_n das iterierte Bild von $P_{0,0}$ im Ursprung, wobei im Prinzip alle Kombinationen der Abbildungen π_0 und π_1 vorkommen. Allerdings gibt es für alle Punkte bis auf den Anfangspunkt $P_{n,0} = (0;0)$ und den Endpunkt $P_{n,2^n} = (1;0)$ immer zwei Abbildungskombinationen. Das wollen wir uns an den ersten Polygonen konkret anschauen.

$P_{0,0} = \pi_0(P_{0,0})$ $P_{0,1} = \pi_1(P_{0,0})$	<p>Polygon Q_0</p> 
<p>Das Polygon Q_0 wird durch π_0 auf die erste Hälfte (schwarz) von Q_1 abgebildet und durch π_1 auf die zweite Hälfte (grau)</p> $P_{1,0} = \pi_0(P_{0,0}) = \pi_0(\pi_0(P_{0,0}))$ $P_{1,1} = \pi_0(P_{1,0}) = \pi_0(\pi_1(P_{0,0}))$ $= \pi_1(P_{1,0}) = \pi_1(\pi_1(P_{0,0}))$ $P_{1,2} = \pi_1(P_{0,0}) = \pi_1(\pi_0(P_{0,0}))$	<p>Polygon Q_1</p> 
<p>Das Polygon Q_1 wird durch π_0 auf die erste Hälfte (schwarz) von Q_2 abgebildet und durch π_1 auf die zweite Hälfte (grau)</p> $P_{2,0} = \pi_0(P_{1,0}) = \pi_0(\pi_0(\pi_0(P_{0,0})))$ $P_{2,1} = \pi_0(P_{1,1}) = \pi_0(\pi_0(\pi_1(P_{0,0})))$ $= \pi_0(\pi_1(\pi_1(P_{0,0})))$ $P_{2,2} = \pi_0(P_{1,2}) = \pi_0(\pi_1(\pi_0(P_{0,0})))$ $= \pi_1(P_{1,2}) = \pi_1(\pi_1(\pi_0(P_{0,0})))$ $P_{2,3} = \pi_1(P_{1,1}) = \pi_1(\pi_0(\pi_1(P_{0,0})))$ $= \pi_1(\pi_1(\pi_1(P_{0,0})))$ $P_{2,4} = \pi_1(P_{1,0}) = \pi_1(\pi_0(\pi_0(P_{0,0})))$	<p>Polygon Q_2</p> 

eindeutige Abbildungsketten

Die Doppeldeutigkeit kommt zuerst durch den Punkt $P_{1,1}$ in den Prozess und pflanzt sich in den nachfolgenden Bildern von $P_{1,1}$ fort. Diesem zweideutigen Bilden der Abbildungsfolgen für die Punkte können wir dadurch entgehen, dass wir nur die Abbildung $P_{1,1} = \pi_0(\pi_1(P_{0,0}))$ zulassen und nicht $P_{1,1} = \pi_1(\pi_1(P_{0,0}))$. Damit lässt sich jeder Eckpunkt eines Polygons über die Abbildungen π_0 und π_1 bis zum Punkt $P_{0,0}$ zurückverfolgen. Wegen $P_{0,0} = \pi_0(P_{0,0})$ können wir zudem erreichen, dass ein Eckpunkt $P_{n,k}$ von Q_n mit genau $n+1$ Abbildungen aus $P_{0,0}$ erzeugt wird. Das wollen wir beispielhaft an den Polygonen Q_2 und Q_3 zeigen.

$P_{2,0} = \pi_0(\pi_0(\pi_0(P_{0,0})))$ $P_{2,1} = \pi_0(\pi_0(\pi_1(P_{0,0})))$ $P_{2,2} = \pi_0(\pi_1(\pi_0(P_{0,0})))$ $P_{2,3} = \pi_1(\pi_0(\pi_1(P_{0,0})))$ $P_{2,4} = \pi_1(\pi_0(\pi_0(P_{0,0})))$	<p>Polygon Q_2</p> 
$P_{3,0} = \pi_0(\pi_0(\pi_0(\pi_0(P_{0,0}))))$ $P_{3,1} = \pi_0(\pi_0(\pi_0(\pi_1(P_{0,0}))))$ $P_{3,2} = \pi_0(\pi_0(\pi_1(\pi_0(P_{1,1})))$ $P_{3,3} = \pi_0(\pi_1(\pi_0(\pi_1(P_{0,0}))))$ $P_{3,4} = \pi_0(\pi_1(\pi_0(\pi_0(P_{0,0}))))$ $P_{3,5} = \pi_1(\pi_1(\pi_0(\pi_1(P_{0,0}))))$ $P_{3,6} = \pi_1(\pi_0(\pi_1(\pi_0(P_{0,0}))))$ $P_{3,7} = \pi_1(\pi_0(\pi_0(\pi_1(P_{0,0}))))$ $P_{3,8} = \pi_1(\pi_0(\pi_0(\pi_0(P_{0,0}))))$	<p>Polygon Q_3</p> 

die Bestimmung der Abbildungsketten

Es ist nun die Frage, wie man zu jedem Punkt $P_{n,k}$ eines beliebigen Polygons Q_n die Abbildungsfolge bestimmt. Wegen der Doppeldeutigkeit des Punktes $P_{1,1}$ als Bild von π_0 als auch π_1 , verfolgen wir die Abbildungen nur bis zum Punkt $P_{1,1}$. Dazu verwenden wir die Aussage von Satz 8.4, formen sie aber so um, dass der Bildpunkt jeweils $P_{n,k}$ heißt:

$$\pi_0(P_{n,k}) = P_{n+1,k} \text{ lautet dann } P_{n,k} = \pi_0(P_{n-1,k}) \text{ f\u00fcr } 0 < k < 2^{n-1} \text{ und}$$

$$\pi_1(P_{n,k}) = P_{n+1,2^{n+1}-k} \text{ lautet } P_{n,k} = \pi_1(P_{n-1,2^n-k}) \text{ f\u00fcr } 2^{n-1} < k < 2^n.$$

Die Intervalle f\u00fcr k sparen dabei drei spezielle Punkte aus:

$P_{n,0}$, der mit $P_{0,0}$ (Ursprung) \u00fcbereinstimmt

$P_{n,2^{n-1}}$, der mit $P_{1,1}$ \u00fcbereinstimmt

$P_{n,2^n}$, der mit $P_{0,1} = (1;0)$ \u00fcbereinstimmt

Damit kann man zu jedem Punkt eine eindeutige Abbildungskette konstruieren, die vom Punkt $P_{1,1}$ zum vorgegebenen Punkt f\u00fchrt. Wir wollen das an einem Beispiel demonstrieren (f\u00fcr die leichtere Lesbarkeit schreiben wir nur die Indizes n,k auf):

$$6,27 \xleftarrow{\pi_0} 5,27 \xleftarrow{\pi_1} 4,5 \xleftarrow{\pi_0} 3,5 \xleftarrow{\pi_1} 2,3 \xleftarrow{\pi_1} 1,1$$

eine neue, charakterisierende Zahl f\u00fcr einen Eckpunkt

Wir erzeugen nun aus dem Indexpaar n,k eine neue Zahl, die die relative Lage des Punktes im Polygon angibt: $r = \frac{k}{2^n}$. r beschreibt den Bruchteil des Polygons, den man von Ursprung, also dem Punkt $P_{n,0}$ durchlaufen muss, um zum Punkt $P_{n,k}$ zu gelangen. Wir berechnen nun f\u00fcr jedes Indexpaar in der obigen Abbildungskette das r und stellen die Zahl im Bin\u00e4rsystem dar.:

$$0.011011 \xleftarrow{\pi_0} 0.11011 \xleftarrow{\pi_1} 0.0101 \xleftarrow{\pi_0} 0.101 \xleftarrow{\pi_1} 0.11 \xleftarrow{\pi_1} 0.1$$

Analysiert man die Entwicklung des Ziffernmusters vom letzten Bildpunkt zurück zum Ausgangspunkt $P_{1,1}$, so bemerkt man, dass immer dann, wenn hinter dem Punkt eine Null steht, diese einfach gestrichen wird. Das entspricht einer Multiplikation mit 2. Steht hinter dem Punkt eine 1, so wird diese ebenfalls gestrichen, die nachfolgenden Ziffern bis auf die letzte werden aber invertiert.

Das können wir mit Satz 8.4 bzw. der entsprechend umgeformten Aussage begründen: Folgt unmittelbar hinter dem Punkt eine Null, so ist $r < 0.1_2 = 0,5$. Der zugehörige Eckpunkt des Polygons Q_n liegt also in der ersten Hälfte und ist daher durch π_0 aus dem vorhergehenden Polygon Q_{n-1} entstanden. Dabei sind die Punktnummern dieselben.

Aus $P_{n,k} = \pi_0(P_{n-1,k})$ für $0 < k < 2^{n-1}$ erhalten wir dann bei umgekehrter Betrachtung $r = \frac{k}{2^n} \rightarrow \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{2k}{2^n} = 2r$

Der Übergang von r zu $2r$ ist genau die oben beschriebene Veränderung der Ziffern. Der Binärpunkt wird um eine Stelle nach rechts verschoben. Da die nun vor dem Punkt liegende Stelle 0 war, steht weiterhin 0 vor dem Punkt.

Folgt hinter dem Punkt eine 1, so ist $r > 0.1_2 = 0,5$. Der zugehörige Eckpunkt des Polygons Q_n liegt also in der zweiten Hälfte und ist daher durch π_1 aus dem vorhergehenden Polygon Q_{n-1} entstanden.

Aus $P_{n,k} = \pi_1(P_{n-1,2^n-k})$ für $2^{n-1} < k < 2^n$ erhalten wir dann bei umgekehrter Betrachtung $r = \frac{k}{2^n} \rightarrow \frac{2^n-k}{2^{n-1}} = 2 - \frac{k}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{k}{2^n}\right) = 2(1-r)$

Der Übergang von r zu $2(1-r)$ ist genau die oben beschriebene Veränderung der Ziffern. Die Subtraktion von 1 bewirkt die Inversion aller Stellen vom Punkt bis zur letzten 1. Da unmittelbar hinter dem Punkt eine 1 stand, wurde diese zur 0. Das Weglassen dieser Null ist wieder eine Multiplikation mit 2.

Die Zeltfunktion Die Operation $r \rightarrow \begin{cases} 2r & \text{für } 0 < r \leq 0,5 \\ 2(1-r) & \text{für } 0,5 < r < 1 \end{cases}$ ist wegen ihres Graphen als „Zeltfunktion“ bekannt.

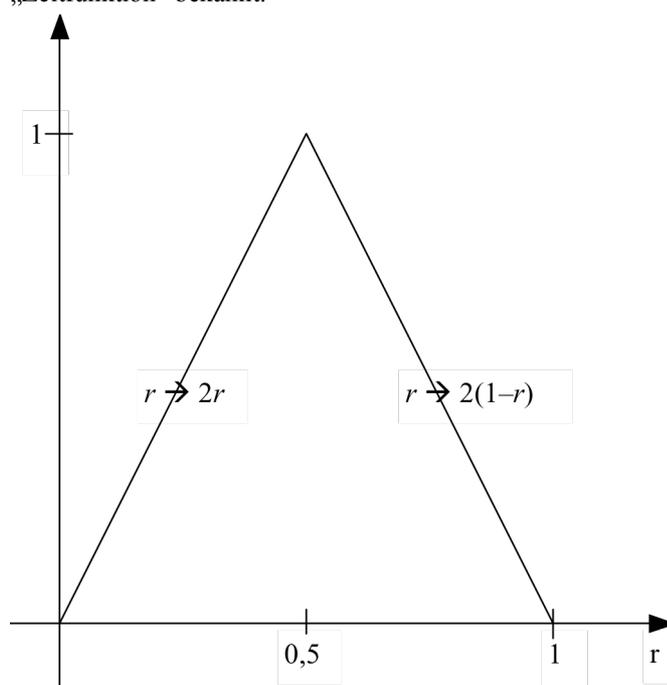


Abb. 8. 8: Der Graph zur Veränderung von r

Mit Hilfe dieses Funktionsgraphen lässt sich sehr einfach und anschaulich die Abbildungskette zu einem gegebenen Punkt $P_{n,k}$ finden. Dazu bilden wir zum Indexpaar n,k den Wert $r = \frac{k}{2^n}$ und iterieren ihn graphisch an der „Zeltfunktion“. Immer

Abbildungskette und Iterationspfad dann, wenn man auf den linken Abschnitt trifft, wurde die Abbildung π_0 angewendet, trifft man auf den rechten Abschnitt, so war es π_1 . Das demonstrieren wir beispielhaft an der Abbildungskette, die oben entwickelt wurde:

$$6,27 \xleftarrow{\pi_0} 5,27 \xleftarrow{\pi_1} 4,5 \xleftarrow{\pi_0} 3,5 \xleftarrow{\pi_1} 2,3 \xleftarrow{\pi_1} 1,1$$

Der Punkt $P_{6,27}$ hat einen Wert $r = \frac{27}{64}$.

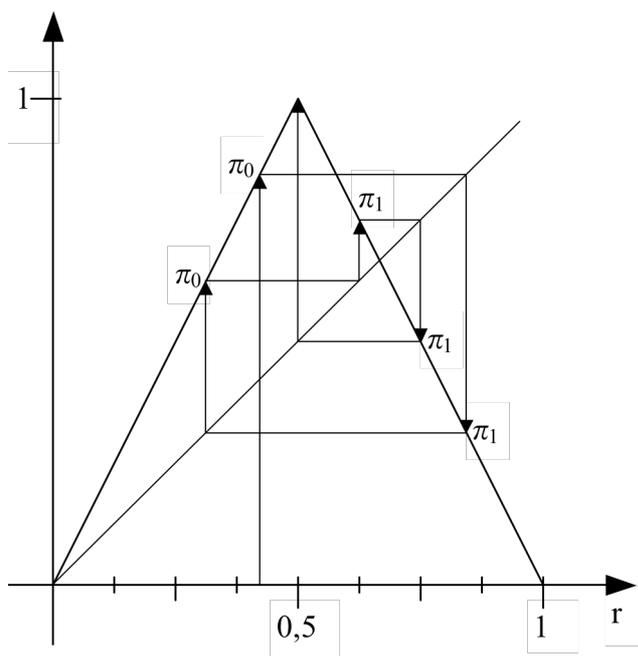


Abb. 8. 9: Der Iterationspfad zum Start mit $r = \frac{27}{64}$

In Abb. 8.9 notieren wir für jedes Treffen des Iterationspfades auf den linken Abschnitt π_0 und auf den rechten Abschnitt π_1 . Wir erhalten so die Abbildungskette $\pi_0, \pi_1, \pi_0, \pi_1, \pi_1$, welche genau der obigen Kette entspricht, gelesen von links nach rechts. Der Iterationspfad endet in der Spitze beim Wert $r = \frac{1}{2}$, welcher zum Punkt $P_{1,1}$ gehört und auf diesen wollten wir alle Abbildungsketten zurückführen.

Die Zeltfunktion und die mit ihr durchgeführte Iteration ist ein Prototyp für chaotisches Verhalten, das sehr gut untersucht ist (siehe z.B. in [M12]). Dadurch, dass wir das iterierte Anwenden der Abbildungen π_0 und π_1 auf das Iterieren mit der Zeltfunktion zurückführen konnten, haben auf einfache Weise zeigen können, dass es sich bei dem Aufbau der Polygone Q_n mit Hilfe der Abbildungen π_0 und π_1 ebenfalls um einen chaotischen Prozess handelt.

Die unendliche Menge Q Wir wollen nun diese Erkenntnisse, die wir bisher an endlichen Polygonen

entwickelt haben, auf den unendlichen Grenzwert $Q = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ (Definition 4.5)

übertragen. Dabei ist Q_k die Menge aller Eckpunkte eines Polygons (Definition 4.4) und der Querstrich bedeutet, dass der Abschluss der Vereinigungsmenge genommen

wird. Da nach Satz 8.5 jedes Polygon Q_n die Vereinigung der beiden Bilder seines Vorgängers Q_{n-1} bezüglich π_0 und π_1 ist und da jeder Punkt P von Q der Grenzwert einer Folge von Polygoneckpunkten ist, gibt es stets eine Folge von Abbildungen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n\dots$ mit $\alpha_i \in \{\pi_0, \pi_1\}$ für $i \in \mathbb{N}$, die $P_{1,1}$ auf den Punkt P abbildet. Q ist also die Menge aller Punkte P , für die es eine Folge von Abbildungen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n\dots$ mit $\alpha_i \in \{\pi_0, \pi_1\}$ für $i \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt: $P = \dots\alpha_n(\dots(\alpha_3(\alpha_2(\alpha_1(P_{1,1}))))\dots)$

Während für die endlichen Polygone Q_n die Beziehung $Q_{n+1} = \pi_0(Q_n) \cup \pi_1(Q_n)$ gilt, ist die unendliche Punktmenge Q gegenüber den Abbildungen π_0 und π_1 invariant, denn es gilt $Q = \pi_0(Q) \cup \pi_1(Q)$. Denn wenn wir einen Punkt P aus Q haben, so ist P durch eine Folge von Abbildungen π_0 oder π_1 aus $P_{1,1}$ entstanden. Das gilt dann aber auch für $\pi_0(P)$ und $\pi_1(P)$, so dass diese auch Elemente von Q sind. Also gilt $Q \supseteq \pi_0(Q) \cup \pi_1(Q)$. Haben wir umgekehrt einen Punkt P aus $\pi_0(Q) \cup \pi_1(Q)$, so gibt es einen Punkt P' aus Q mit $P = \pi_0(P')$ oder $P = \pi_1(P')$. $P' \in Q$ bedeutet aber, dass es eine Folge von Abbildungen π_0 oder π_1 gibt, die $P_{1,1}$ auf P' abbildet. Damit gibt es eine Folge von Abbildungen π_0 oder π_1 , die $P_{1,1}$ auf P abbildet. Das bedeutet aber, dass P auch in Q liegt. Also gilt $Q \subseteq \pi_0(Q) \cup \pi_1(Q)$ und damit $Q = \pi_0(Q) \cup \pi_1(Q)$.

Der Highway-Dragon ist selbstähnlich

Damit kann also Q in zwei Teilmengen zerlegt werden. Da aber π_0 und π_1 Ähnlichkeitsabbildungen sind, bedeutet das, dass $\pi_0(Q)$ und $\pi_1(Q)$ ähnliche Bilder von Q selbst sind. Nach Satz 8.2 wissen wir, dass beide Bilder über eine Drehung um 270° gegen den Uhrzeigersinn (oder 90° im Uhrzeigersinn) zusammenhängen, also zueinander kongruent sind. Damit lässt sich also Q in zwei Teile zerlegen, die zueinander kongruent und zur Gesamtfigur ähnlich sind. Das ist aber genau die Definition von Selbstähnlichkeit.

In [P03] zeigen Davis und Knuth, dass der Highway-Dragon eine flächenfüllende Kurve ist.

Die Selbstähnlichkeit lässt sich sehr schön grafisch veranschaulichen. Dabei nehmen wir wieder Q_{16} als Näherungsfigur für Q .

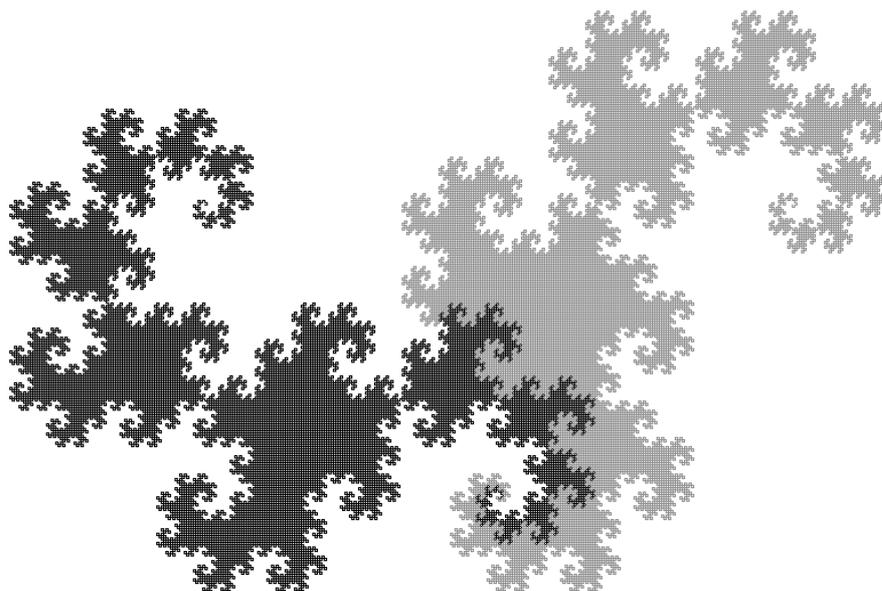


Abb. 8.10: $Q_{16} = \pi_0(Q_{15}) \cup \pi_1(Q_{15})$ als Näherung für Q . Dabei ist $\pi_0(Q_{15})$ schwarz und $\pi_1(Q_{15})$ grau dargestellt.

Die Zerlegung lässt sich konsequenterweise fortsetzen, denn wenn die beiden Teile ähnlich zu Q sind, so kann man die Teile genau so in zwei zur Gesamtfigur ähnliche Teile zerlegen, die untereinander kongruent sind.

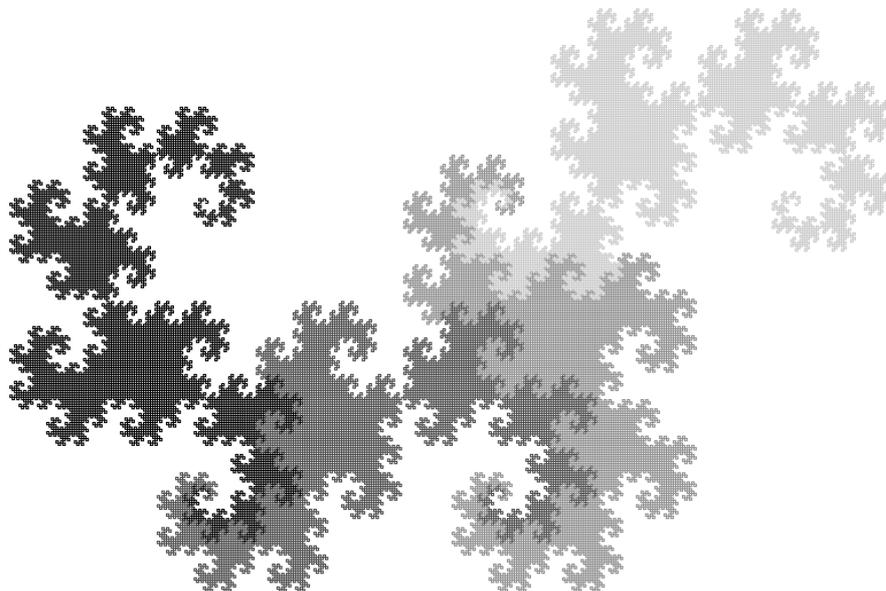


Abb. 8.11: Die beiden Teilfiguren aus Abb. 8.10 sind wiederum in Teilfiguren zerlegt.

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

Da die Menge Q Grenzwert eines iterierten Funktionensystems ist, kann sie näherungsweise durch ein „Chaosspiel“ dargestellt werden. Die notwendigen Rechnungen führt man praktischerweise in Excel durch, hier sind sie am leichtesten durchzuführen und nachzuvollziehen. Natürlich können Schüler auch ein spezielles Programm schreiben und somit erheblich mehr Pixel erzeugen.

Unterrichtsvorschlag

angesprochene schulmathematische Themen

Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, analytische Behandlung von affinen Abbildungen

Aufgabenstellung

Erstellen Sie eine Exceltabelle, in der eine zufällige Abbildungsfolge von $P_{1,1}$ berechnet und grafisch dargestellt wird.

Erweiterung: Färben Sie Teile der Figur ein, so dass die Selbstähnlichkeit dargestellt wird.

Lösungen

Für die einfache Tabelle benötigt man drei Spalten: eine für eine Zufallszahl 0 oder 1 und je eine für die x- und die y-Koordinate des Punktes.

	A	B	C
1	Zufall	x	y
2		0,5	-0,5
3	0	0	-0,5
4	1	0,75	0,25
5	0	0,5	-0,25
6	1	0,625	-0,125

Abb. 8.12: Die ersten 6 Zeilen der einfachen Tabelle

Eine Zufallszahl von 0 oder 1 erzeugt man mit: `=RUNDEN(ZUFALLSZAHL();0)`
 In der x-y-Doppelspalte stehen die Koordinaten der Punkte. Als Initialisierung des iterativen Prozesses nehmen wir die Koordinaten von $P_{1,1}$, also $x = 0,5$ und $y = -0,5$. (In Abb. 8.12 ist das die Zeile 2) Die weiteren Punkte werden nun in Abhängigkeit der Zufallszahl berechnet. Ist es 0, so wird der vorhergehende Punkt mit π_0 abgebildet, bei 1 mit π_1 . Die Formeln für die Koordinaten lauten dann (in Abb. 8.12 für die Zellen B3 und C3):

x-Koordinate: `=WENN(A3=0;(B2+C2)/2;(C2-B2)/2+1)`

y-Koordinate: `=WENN(A3=0;(C2-B2)/2;-(B2+C2)/2)`

Diese drei Formeln (in Abb. 8.12 in Zeile 3) werden nun nach unten kopiert, so dass mehrere tausend Punkte berechnet werden.

Die Werte dieser Doppelspalte werden dann als x-y-Punktdiagramm dargestellt.

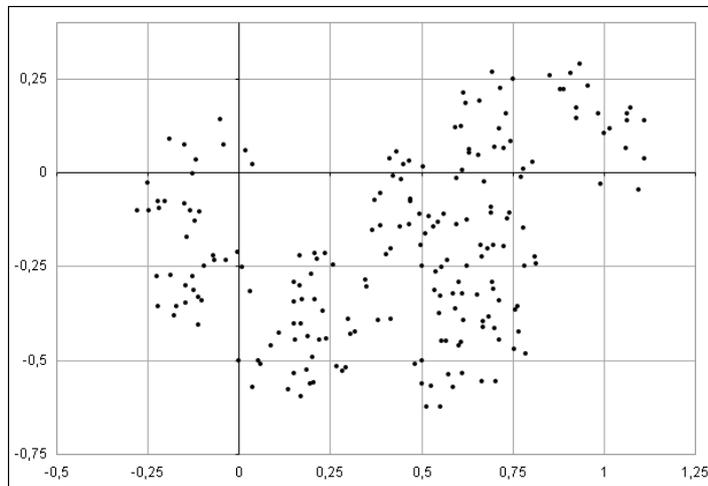


Abb. 8.13: Das Diagramm mit 200 Punkten

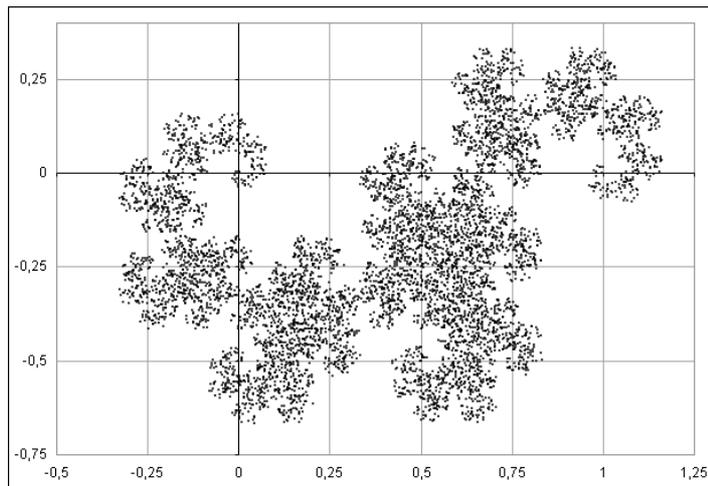


Abb. 8.14: Das Diagramm mit 6800 Punkten

Will man die beiden Teilmengen herausstellen, aus denen die gesamte Punktmenge Q zusammengesetzt ist, so muss man in der Exceltabelle zwei Diagramme erzeugen, die unterschiedlich gefärbt werden. Das eine Diagramm wird von all den Punkten erzeugt,

die zuletzt mit π_0 abgebildet wurden, das andere von den Punkten, die zuletzt mit π_1 abgebildet wurden.

Dazu legt man vier neue Spalten an.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Zufall	x	y	x0	y0	x1	y1
2		0,5	-0,5				
3	1	0,5	0	0	0	0,5	0
4	0	0,25	-0,25	0,25	-0,25	1	0
5	1	0,75	0	0	0	0,75	0
6	0	0,375	-0,375	0,375	-0,375	1	0
7	0	0	-0,375	0	-0,375	1	0

Abb. 8.15: Die Tabelle wird um vier Spalten ergänzt

Ist die Zufallszahl (in Abb. 8.15 in Spalte A) 0, so werden die Koordinaten in die Spalten für das erste Diagramm übernommen (in Abb. 8.15 Spalten D und E), während in den Spalten für das zweite Diagramm (in Abb. 8.15 Spalten F und G) die Ersatzkoordinaten (1;0) eingetragen werden.

Ist die Zufallszahl 1, so werden die Koordinaten in die Spalten für das zweite Diagramm übernommen, während in den Spalten für das erste Diagramm die Ersatzkoordinaten (0;0) eingetragen werden.

Diese Überlegungen führen zu folgenden Formeln (für die Zeile 3):

x0-Koordinate: =WENN(A3=0;B3;0)

y0-Koordinate: =WENN(A3=0;C3;0)

x1-Koordinate: =WENN(A3=1;B3;1)

y1-Koordinate: =WENN(A3=1;C3;0)

Diese Formeln kopiert man so weit herunter, wie die Koordinaten der Punkte bereits berechnet wurden.

Mit einer unterschiedlichen Einfärbung für die beiden Diagramme erhält man dann:

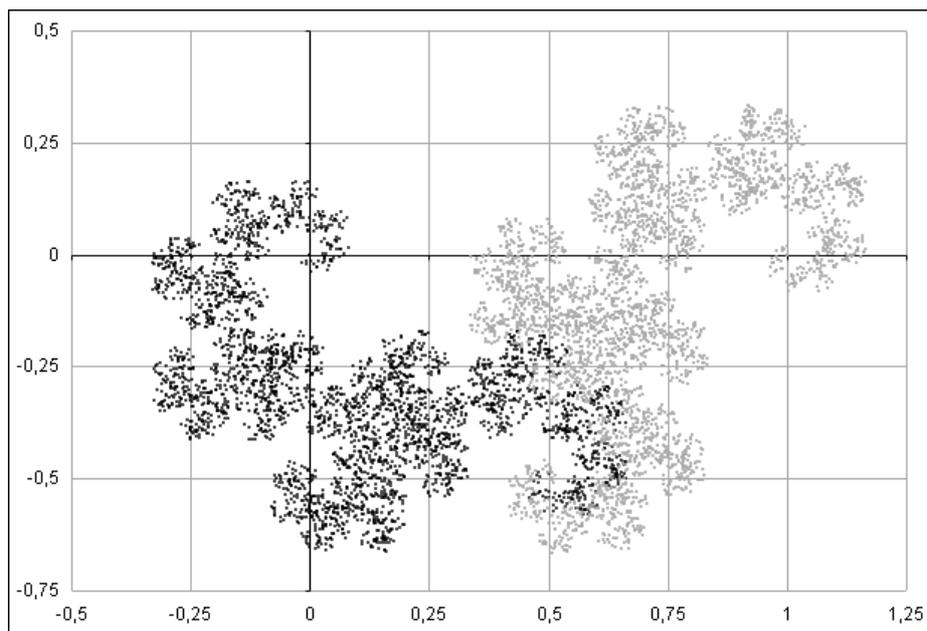


Abb. 8.16: Die beiden Diagramme, unterschieden nach der zuletzt angewendeten Abbildung

In analoger Weise kann man auch vier (die letzten beiden Abbildungen sind maßgeblich) oder acht (die letzten drei Abbildungen sind maßgeblich) Teile sichtbar machen. Dazu ist es dann allerdings notwendig, dass die Anzahl der Punkte erhöht wird. Will man in jedem Teil ca. 3000 Punkte haben, so braucht man bei einer Aufteilung in 4 Teile 12000 Punkte, in 8 Teile 24000 Punkte. Excel lässt in seinen Tabellen bis zu 65000 Zeilen zu.