6 Die Papierfaltungszahl

Analog zu den beiden vorangegangenen Kapiteln werden wir aus einem weiteren mathematischen Gebiet auf die Papierfaltungswörter schauen. Dieses Mal wählen wir ein Gebiet, das die meisten Menschen sofort mit Mathematik verbinden und welches ihnen auch recht vertraut ist: die Zahlen.

Die Papierfaltungsfolge als Zahl

Eine LR-Zeichenkette wollen wir in eine Zahl verwandeln, indem wir jedes „L“ in eine 1 und jedes „R“ in eine 0 übersetzen. Jede 01-Zeichenkette fassen wir als eine Ziffernfolge auf, die hinter dem Komma steht, vor das Komma setzen wir einfach eine Null.

Dann erhalten wir:

$$L \rightarrow 0{,}1 \qquad LLR \rightarrow 0{,}110 \qquad LLRLLRR \rightarrow 0{,}1101100 \quad \text{u.s.w.}$$

Da wir mit „L“ und „R“ nur zwei Zeichen zur Verfügung haben, ist es nahe liegend, dass wir die Zahl als duale Kommazahl auffassen. Die erste Stelle hinter dem Komma hat dann nicht die Wertigkeit $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, sondern $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, die zweite Stelle die Wertigkeit $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ u.s.w. . Zur Unterscheidung von Dezimalzahlen werden wir kein Komma setzen, sondern einen Punkt.

Unter der Papierfaltungszahl p verstehen wir dann die unendliche, duale Kommazahl, die sich aus der entsprechenden Übersetzung der Papierfaltungsfolge ω ergibt.

$$p = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2^2} + 0\cdot\frac{1}{2^3} + 1\cdot\frac{1}{2^4} + 1\cdot\frac{1}{2^5} + 0\cdot\frac{1}{2^6} + \ldots$$

Stufe	Binärzahl	Dezimalzahl
1	0.1	0,5
2	0.110	0,75
3	0.1101100	0,84375
4	0.110110011100100	0,8507080078125
5	0.11011001110010011101100011001 00	0,850736187770963...*

Die Tabelle zeigt die ersten fünf Näherungen der Papierfaltungszahl, wie sie aus den ersten fünf Wörtern w_1 bis w_5 berechnet werden können. Hier können wir sehen, dass das einfache Aufsummieren der Ziffern der binären Darstellung ein Verfahren ist, das nicht sehr schnell konvergiert.

Für eine mathematische Formulierung der neuen Interpretation der Papierfaltungsfolge ω als Zahl definieren wir eine Funktion, die jedem Zeichen der Papierfaltungsfolge in Abhängigkeit von der Position eine Zahl zuordnet. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es nützlich, dass in diese Zuordnung eine Basis für ein Zahlsystem mit einbezogen wird.

* Die letzte Dezimalzahl in der Tabelle ist nicht mehr ganz exakt, sondern auf 15 Stellen verkürzt, da dieses die maximale Stellenzahl von Excel ist, mit dem die Zahlen ermittelt wurden.

Definition 6.1

Die Funktion σ^* ordnet jedem Zeichen der Papierfaltungsfolge ω eine Zahl zu durch

$$\sigma^* : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ (i,b) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b^i} & \text{für } \sigma(i) = L \\ 0 & \text{für } \sigma(i) = R \end{cases} \end{cases}$$

Dabei ist mit σ die in Kapitel 2, Definition 2.6 definierte Funktion gemeint, die jeder Stelle i in der unendlichen Papierfaltungsfolge ω das Symbol „L“ oder „R“ zuordnet.

Diese Definition ist etwas allgemeiner als die anfängliche Beschreibung, denn sie lässt die Interpretation der Papierfaltungsfolge in einem allgemeinen Stellenwertsystem zur Basis b zu.

Die Papierfaltungszahl p erhalten wir dann durch $p = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(i,2)$.

Wir wollen nun bereits gefundene Eigenschaften der Papierfaltungsfolge verwenden, um einige Eigenschaften über die Papierfaltungszahl zu finden und letztlich eine Summenformel zu finden, mit der wir die Papierfaltungszahl effizient berechnen können.

Ist die Papierfaltungszahl rational?

Die erste Frage ist, ob die Papierfaltungszahl eine rationale oder eine irrationale Zahl ist. Jede rationale Zahl lässt sich als ein Bruch schreiben und ist als Dezimalzahl entweder endlich oder unendlich periodisch. Das gilt analog in jedem Stellenwertsystem, also auch im Binärsystem, in dem wir die Papierfaltungszahl definiert haben. Nun wissen wir aus Kapitel 5, Satz 5.1, dass die Papierfaltungsfolge nicht periodisch ist. Folglich ist die Darstellung der Papierfaltungszahl im Binärsystem nicht periodisch, also ist die Papierfaltungszahl irrational.

Kettenbrüche

Neben der Darstellung in einem Stellenwertsystem kann man einige irrationale Zahlen, insbesondere Quadratwurzeln, sehr regelmäßig als Kettenbrüche darstellen. Wir wollen kurz den Algorithmus zur Berechnung der Kettenbruchdarstellung erläutern:

Jede positive Zahl $r \in \mathbb{R}$ können wir eindeutig zerlegen in $r = g_0 + r_0$ mit $g_0 \in \mathbb{N}_0$ und $r_0 \in \mathbb{R}, 0 \le r_0 < 1$. Ist $r_0 = 0$, so ist der Kettenbruchalgorithmus beendet. Für $r_0 > 0$ ist $\frac{1}{r_0}$ größer als 1 und kann somit wieder in eine ganze Zahl und einen Rest kleiner als 1 aufgespaltet werden: $\frac{1}{r_0} = g_1 + r_1$ mit $g_1 \in \mathbb{N}$ und $r_1 \in \mathbb{R}, 0 \le r_1 < 1$. Mit dem Kehrwert von r_1 kann man entsprechend verfahren. Wir erhalten also folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} z &= g_0 + r_0 \\ &= g_0 + \frac{1}{\frac{1}{r_0}} = g_0 + \frac{1}{g_1 + r_1} \\ &= g_0 + \frac{1}{g_1 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}}} = g_0 + \frac{1}{g_1 + \frac{1}{g_2 + r_2}} \end{aligned}$$

, u.s.w.

Der Algorithmus terminiert dann, wenn ein $r_i = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$

Auf diese Art erhält man eine eindeutig definierte endliche oder unendliche Folge ganzer Zahlen g_0, g_1, g_2, ..., die ebenfalls eine Darstellung einer Zahl ist.

Führen wir das einmal konkret am Beispiel von $\sqrt{2}$ durch:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2,414213..}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,414213..}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,414213..}}}$$

Dabei verwenden wir in der Näherungsrechnung die Umformung

$$0,414213... = \sqrt{2} - 1$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$
$$= \sqrt{2} + 1$$
$$\approx 2,414213...$$

Die Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln ist periodisch

$\sqrt{2}$ hat als Kettenbruchdarstellung [1;2,2,2,2,....], was eine unendliche, schließlich periodische Darstellung ergibt. Diese Darstellung von $\sqrt{2}$ ist also sehr viel übersichtlicher als die Dezimaldarstellung. (Übrigens haben alle Quadratwurzeln eine unendliche, schließlich periodische Kettenbruchdarstellung.)

Natürlich steht nun die Frage im Raum, was denn die Kettenbruchdarstellung[1] der Papierfaltungszahl ist. Hier ist sie, soweit sie mit einem einfachen Rechner zuverlässig berechnet werden kann:

$$0,850736187770963... = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{107 + ...}}}}}}}}}$$

Wir sehen, dass die Kettenbruchdarstellung der Papierfaltungszahl keine einfach ersichtliche Regelmäßigkeit aufweist.

Näherungen für π

Unser bisheriges Vorgehen ähnelt ein wenig der Suche nach einer „guten“ Näherungszahl für die Zahl π. Die ersten Näherungen durch rationale Zahlen, $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$ sind Werte, die sich aus der Kettenbruchdarstellung ergeben. Weitere, sehr

[1] Unter der Adresse (September 2006):

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?

session=047FA4F6D5.3&+lang=en&+module=tool%2Fnumber%2Fcontfrac.en

findet man einen sehr genauen Rechner für Kettenbrüche

effiziente Berechnungen für Näherungen von π ergeben sich aus der Potenzreihenentwicklung von arctan, nämlich

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots .$$

Setzt man hier $x = 1$, so erhält man eine einfache Reihendarstellung für π:

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots \right)$$

Schaut man sich die ersten Berechnungsschritte an, so sieht man, dass die Folge der Partialsummen nur langsam konvergiert.

Term	Näherungszahl
4	4,00000
$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right)$	2,66667
$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$	3,46667
$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$	2,89524
$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right)$	3,33968
$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right)$	2,97605

Es ist daher naheliegend, nach einer effizienteren Berechnung zu suchen. Gauß entwickelte aus der Reihenentwicklung für den arctan die Formel

$$\pi = 48 \arctan \frac{1}{48} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 20 \arctan \frac{1}{239}$$

wobei die drei arctan letztlich näherungsweise durch die oben angegebene Reihe ausgerechnet werden. Diese Berechnung konvergiert nun sehr viel schneller.

Verbesserung der Summation für die Papierfaltungszahl

In ähnlicher Weise wollen wir nun die Papierfaltungszahl, die als Potenzreihe definiert ist, durch geschickte Summation effizienter berechnen[2]. Nach dem Inflationsgesetz (Kapitel 3) liegt es nahe, die ungeraden Plätze von den geraden zu unterscheiden. Auf den ungeraden Plätzen stehen abwechselnd die Ziffern 0 und 1, also auf jedem 4. Platz die Ziffer 1.

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(i,2) = \sum_{i \text{ ungerade}} \sigma^*(i,2) + \sum_{i \text{ gerade}} \sigma^*(i,2) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(2i-1,2) + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(2i,2) \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \frac{0}{2^{11}} + \frac{1}{2^{13}} + \ldots \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(2i,2) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4i-3}} + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(2i,2)
\end{aligned}$$

[2] Die wesentlichen Ideen hierzu stammen aus Peitgen [P08] und [P09]

Den ersten Teil können wir als geometrische Reihe aufsummieren:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{13}}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^4}+\left(\frac{1}{2^4}\right)^2+\left(\frac{1}{2^4}\right)^3+\ldots\right)$$

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4i}}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(2i,2)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^i+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(2i,2)\\&=\frac{8}{15}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(2i,2)\end{aligned}$$

Der zweite Teil, die Summation der geraden Stellen, ist noch offen. Hier verwenden wir die Deflation aus Kapitel 3 mit der wichtigen Eigenschaft, dass $\sigma(2i)=\sigma(i)$. Damit erhalten wir folgende Umformung:

$$\sigma^*(2i,2)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2^{2i}} & \text{für } \sigma(2i)=\mathrm{L}\\ 0 & \text{für } \sigma(2i)=\mathrm{R}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{4^{i}} & \text{für } \sigma(2i)=\sigma(i)=\mathrm{L}\\ 0 & \text{für } \sigma(2i)=\sigma(i)=\mathrm{R}\end{Bmatrix}=\sigma^*(i,4)$$

Damit können wir die Umformung abschließen mit :

$$p=\frac{8}{15}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,4)$$

Wechsel der Basis für die Zahldarstellung

Diese letzte Summe können wir auch so interpretieren, dass wir die Papierfaltungsfolge wieder in eine Zahl übersetzten mit „L“ für 1 und „R“ für 0, aber nun die Stellen im Vierer-System interpretieren, also LLRLLRRL... übersetzen in die Summe $1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4+1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5+0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6+0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7+1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8+\ldots$

Diesen Wechsel der Basis können wir verallgemeinern auf eine allgemeine Basis b.

Satz 6.1

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,b)=\frac{b^3}{b^4-1}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,b^2)$$

Beweis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,b)&=\sum_{i\text{ ungerade}}\sigma^*(i,b)+\sum_{i\text{ gerade}}\sigma^*(i,b)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(2i-1,b)+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(2i,b)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b^{4i-3}}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(2i,b)\end{aligned}$$

Die erste Summe lässt sich als geometrische Reihe berechnen.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b^{4i-3}}=\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{b^{4i}}=\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{1}{b^4}}=\frac{b^3}{b^4-1}$$

Den Summand der zweiten Summe können wir umformen.

$$\sigma^*(2i,b)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{b^{2i}} & \text{für } \sigma(2i)=\mathrm{L}\\ 0 & \text{für } \sigma(2i)=\mathrm{R}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{\left(b^2\right)^i} & \text{für } \sigma(2i)=\sigma(i)=\mathrm{L}\\ 0 & \text{für } \sigma(2i)=\sigma(i)=\mathrm{R}\end{Bmatrix}=\sigma^*(i,b^2)$$

Beides eingesetzt ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,b)=\frac{b^3}{b^4-1}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,b^2)$$

Wir iterieren nun dieses Summieren von Summanden auf ungeraden und geraden Stellen. Zunächst wenden wir Satz 6.1 auf das Ergebnis der ersten Umformung an und erhalten so:

$$p=\frac{8}{15}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,4)=\frac{8}{15}+\frac{4^3}{4^4-1}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,16)=\frac{8}{15}+\frac{64}{255}+\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^*(i,16)$$

Und in der Fortsetzung dieses Prozesses

$$\begin{aligned}p&=\frac{8}{15}+\frac{4^3}{4^4-1}+\frac{16^3}{16^4-1}+\frac{256^3}{256^4-1}+\ldots\\&=\frac{2^3}{2^4-1}+\frac{(2^2)^3}{(2^2)^4-1}+\frac{(2^4)^3}{(2^4)^4-1}+\frac{(2^8)^3}{(2^8)^4-1}+\ldots+\frac{(2^{2^k})^3}{(2^{2^k})^4-1}+\ldots\\&=\frac{8}{16-1}+\frac{8^2}{16^2-1}+\frac{8^4}{16^4-1}+\frac{8^8}{16^8-1}+\ldots+\frac{8^{2^k}}{16^{2^k}-1}+\ldots\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{8^{2^i}}{16^{2^i}-1}\end{aligned}$$

Eine neue Summendarstellung für die Papierfaltungszahl

Diese neue Darstellung der Papierfaltungszahl als Reihe ist erheblich effizienter, denn sie konvergiert sehr schnell. Aus diesem Grunde berechnen wir die ersten 10 Partialsummen mit einem CAS, das eine deutlich höhere Stellenzahl zulässt.

n	$\sum_{i=0}^{n}\frac{8^{2^i}}{16^{2^i}-1}$
0	0.533333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
1	0.784313725490196078431372549019607843137254901960784313725490 1
2	0.846814679179064621957732509346150911726558327611200122072175 1
3	**0.8**50720929179974116659717195820928829680413200911230687264173 9
4	**0.8507**36187969036616659718023001541382708088117161473615621173 7
5	**0.85073618**2018672603135876519077913827080881171621578433869573
6	**0.8507361882018672603**677977605320666044084607572056549289582464
7	**0.850736188201867260367797760532066604**4113994930827106477281682
8	**0.85073618820186726036779776053206660441139949308271064772816 82**
9	**0.85073618820186726036779776053206660441139949308271064772816 82**
10	**0.85073618820186726036779776053206660441139949308271064772816 82**

Der Tabelle kann man sehr schön entnehmen, dass sich ab der 3 Partialsumme mit jedem Summanden die Anzahl der verlässlichen Stellen etwa verdoppelt und die 8. Partialsumme bereits die hier angezeigten 61 Stellen erreicht. Der verkürzten

Darstellung in der Tabelle kann man nicht entnehmen, dass die 10. Partialsumme entsprechend dieser Beobachtung eine Genauigkeit von etwa 300 Stellen erreicht.

An dieser Stelle können wir unsere Betrachtungen überleiten in ein sehr schönes Ergebnis von Kurt Mahler[3], das eng mit unseren bisherigen Betrachtungen verbunden ist. Der Anknüpfungspunkt ist die Aussage von Satz 6.1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(i,b) = \frac{b^3}{b^4-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(i,b^2) \quad (1)$$

Die beiden Summen wollen wir ein wenig anders interpretieren.

$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(i,b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \frac{1}{b^i}$, wobei die a_i gerade die in 1 oder 0 interpretierten Symbole der Papierfaltungsfolge sind.

Entsprechend ist dann die zweite Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^*(i,b^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \frac{1}{\left(b^2\right)^i}$.

Gleichung (1) schreiben wir nun ein wenig formaler. Wir setzen $x = \frac{1}{b}$ und können so die linken Seite als formale Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i$ schreiben.

Damit wird (1) zu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i = \frac{x}{1-x^4} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \left(x^2\right)^i$ oder $f(x) - f(x^2) = \frac{x}{1-x^4}$.

Funktionalgleichungen[4] dieser Art wurden von Mahler untersucht und stellen die Eingangsvoraussetzung seiner Theorie dar, um schließlich den Transzendenzbeweis zu führen. Wir können somit feststellen, dass die von uns betrachtete Papierfaltungszahl transzendent ist.

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

Die Definition der Papierfaltungszahl erweckt das Bedürfnis, diese möglichst genau zu berechnen. Was möglichst genau bedeutet, hängt einerseits von den technischen Möglichkeiten ab, die zur Verfügung stehen, andererseits vom „Sportsgeist“ der beteiligten SchülerInnen. Es ist aber eine ausgezeichnete Gelegenheit, über Zahldarstellung und die jeweilige Umrechnung zu sprechen.

1. Unterrichtsvorschlag (Zu periodischen Kommazahlen)

angesprochene schulmathematische Themen

Stellenwertsysteme, rationale Zahlen

[3] Wie Otto Toeplitz war Kurt Mahler ein Jude, der von den Nazis aus Deutschland vertrieben wurde. Mahler verließ 1933 Deutschland und hielt sich bis 1962 überwiegend in Manchester auf. Die letzten 6 Jahre seines Lebens verbrachte er in Canberra (Australien).

[4] Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionsgleichungen, Math. Ann., 101(1929), 342-366

Fragestellung

Gegeben ist eine periodische Kommazahl in einem beliebigen Stellenwertsystem. Wie berechnet man zu dieser Zahl die Bruchdarstellung im Dezimalsystem?

Ablauf

Beispiel: Gegeben ist $r = 0.3121212...._5 = 0.3\overline{12}_5$ Der Index zeigt die Basis des Stellenwertsystems an, also $b = 5$.

1. Schritt: Die Zahl wird so multipliziert, dass eine vollständige Periode vor dem Punkt steht. Das sind in unserem Beispiel 3 Stellen, folglich muss mit $5^3 = 125_{10}$ multipliziert werden: $125_{10} r = 312.1212..._5$

2. Schritt: Die Zahl wird so multipliziert, dass die Periode direkt hinter dem Punkt beginnt. In unserem Beispiel ist das 5, da die Zahl eine einstellige Vorperiode hat. $5_{10} r = 3.121212..._5$. Bei sofort periodischen Zahlen wird mit r selbst gerechnet.

3. Schritt: Die beiden Multiplikationsergebnisse werden von einander subtrahiert. Dabei fällt immer die Periode durch die Subtraktion weg. Achtung: Auf der rechten Seite der Gleichung muss die Differenz im gegebenen Stellenwertsystem durchgeführt werden.

$$125_{10} r - 5_{10} r = 312_5 - 3_5$$
$$120_{10} r = 304_5$$

4. Schritt: Die Zahl auf der rechten Seite muss vom vorgegebenen Basissystem in das Zehnersystem umgewandelt werden. Anschließend kann die Zahl als Bruch im Dezimalsystem geschrieben und ggfs. gekürzt werden.

$$120_{10} r = 3_{10} \cdot 25_{10} + 4_{10} = 79_{10}$$
$$r = \frac{79}{120}$$

2. Unterrichtsvorschlag (Zur Kettenbruchdarstellung)

angesprochene schulmathematische Themen

Bruchrechnung, rationale Zahlen, Euklidischer Algorithmus, Wurzeln

Aufgabenstellung

Die Schülerinnen und Schüler sollen einige Zahlen als Kettenbruch entwickeln und so Erfahrung sammeln in der Kettenbruchentwicklung von

a) rationalen Zahlen

Hier gilt es, den Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus zu sehen

b) Quadratwurzeln

Hier soll entdeckt werden, dass Quadratwurzeln eine periodische Kettenbruchentwicklung haben.

Ablauf

1. Beispiel: Die Entwicklung von $\frac{42}{29}$ in einen Kettenbruch.

$$\frac{42}{29}=1+\frac{13}{29}=1+\frac{1}{\frac{29}{13}}=1+\frac{1}{2+\frac{3}{13}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{3}}}=\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{2}+\frac{1}{\mathbf{4}+\frac{1}{\mathbf{3}}}}$$

Wir betrachten dazu parallel den Euklidischen Algorithmus für die beiden Zahlen im Zähler bzw. Nenner des Ausgangsbruches:

$$42=\mathbf{1}\cdot 29+13$$
$$29=\mathbf{2}\cdot 13+3$$
$$13=\mathbf{4}\cdot 3+1$$
$$3=\mathbf{3}\cdot 1$$

Man erkennt sehr schön, dass die Faktoren im Euklidischen Algorithmus gerade die ganzen Zahlen in der Kettenbruchentwicklung sind.

Die Begründung für diesen Zusammenhang erkennt man deutlich durch die nachfolgende Umformung. Sind x_0 und x_1 die beiden Ausgangszahlen, also $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$, $x_0 > x_1$, so beginnt der Euklidische Algorithmus mit

$$x_0 = n_1 \cdot x_1 + x_2$$
$$x_1 = n_2 \cdot x_2 + x_3$$
$$x_2 = n_3 \cdot x_3 + x_4$$
$$\ldots$$

Nun dividieren wir jede Zeile durch die mittlere Zahl x_i, $i \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$\frac{x_0}{x_1} = n_1 + \frac{x_2}{x_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = n_2 + \frac{x_3}{x_2}$$
$$\frac{x_2}{x_3} = n_3 + \frac{x_4}{x_3}$$
$$\ldots$$

Beachtet man, dass jede neue Zeile mit dem Kehrwert des zweiten Summanden der vorhergehenden Zeile beginnt, so können wir die Gleichungen sukzessive ineinander einsetzen.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_0}{x_1} = n_1 + \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} = n_2 + \frac{x_3}{x_2} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{n_2 + \frac{x_3}{x_2}} \end{array}\right\} \frac{x_0}{x_1} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{x_3}{x_2}}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = n_3 + \frac{x_4}{x_3} \Rightarrow \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{n_3 + \frac{x_4}{x_3}} \Rightarrow \frac{x_0}{x_1} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{x_4}{x_3}}}$$

$$\ldots$$

Den Euklidischen Algorithmus kann man sehr anschaulich grafisch darstellen:

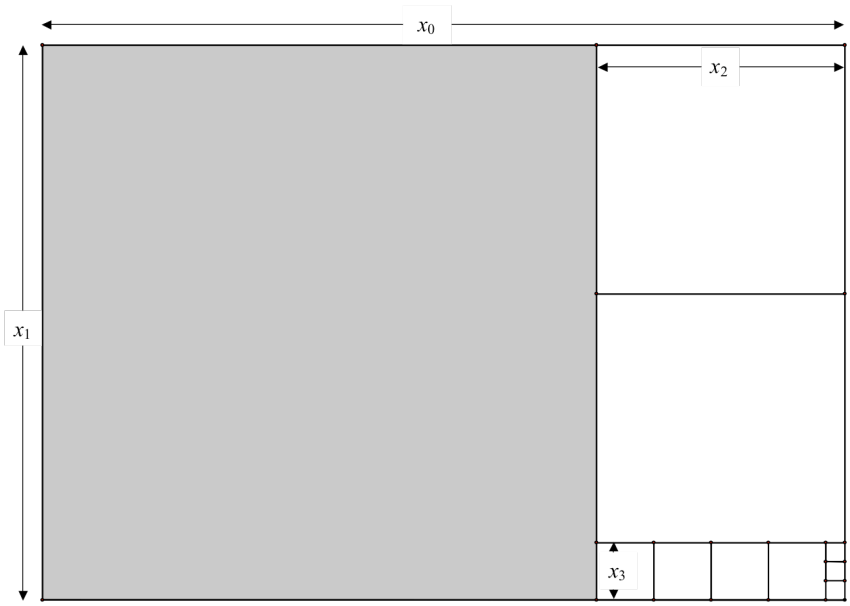

Abb. 6.1: Die Darstellung des Euklidischen Algorithmus zu $x_0 = 42$ und $x_1 = 29$. Man kann sehr gut die Faktoren $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$ und $n_4 = 3$ erkennen.

Man zeichnet ein Rechteck mit den beiden Ausgangszahlen x_0 und x_1 als Seitenlängen. Dann trägt man entlang der längeren Seite $\boldsymbol{n_1}$ Quadrate mit der Kantenlänge x_1 ab. Im Beispiel der Abb. 6.1 ist das das eine ($n_1 = 1$), grau dargestellte Quadrat. Es bleibt ein Streifen der Breite x_2 über, $x_2 < x_1$. In diesem Rechteck trägt man nun entlang der längeren Seite $\boldsymbol{n_2}$ Quadrate der Kantenlänge x_2 ab, u.s.w. Die Länge des letzten Quadrates ist der gesuchte ggT(x_0, x_1).

Da die Kettenbruchentwicklung mit dem Euklidischen Algorithmus direkt verknüpft ist, kann man aus der grafischen Veranschaulichung auch direkt die Kettenbruchentwicklung ablesen.

2. Beispiel: Die Entwicklung von $\sqrt{3}$ in einen Kettenbruch.

$$\sqrt{3} = 1{,}713... = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

Hier kann man jetzt die Periode in der Kettenbruchentwicklung erkennen, denn addiert man auf beiden Seiten 1, erhält man:

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

D.h. $\sqrt{3}+1$ kann wiederholt ersetzt werden durch den Abschnitt der Kettenbruchentwicklung, die auf der rechten Seite steht. Eine Ersetzung führt dann zu

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}}}$$

Das führt dann zur periodischen Fortsetzung der Kettenbruchentwicklung, so dass man erhält: $\sqrt{3} = [1;1,2,1,2,1,2,...]$.

Die umgekehrte Aussage, nämlich dass jede schließlich periodische Kettenbruchentwicklung zu einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl gehört, wollen wir ebenfalls am Beispiel von $\sqrt{3}$ demonstrieren.

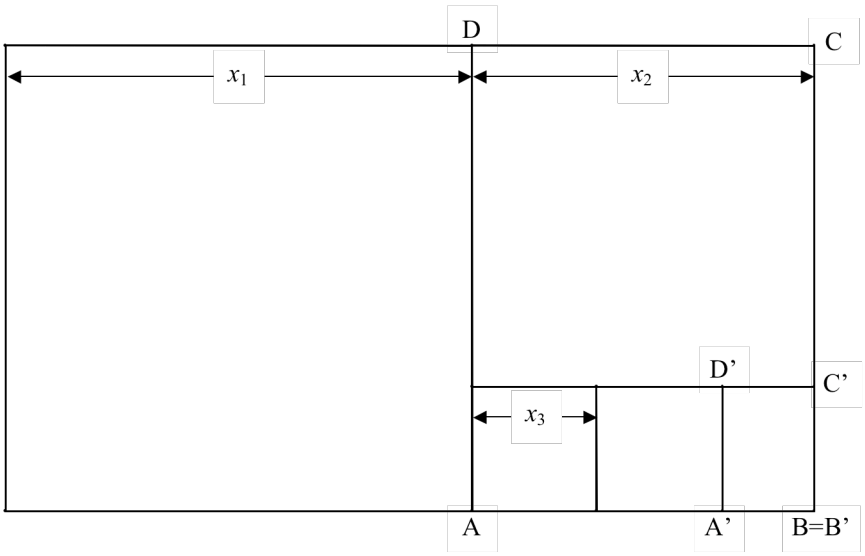

Abb. 6.2: Die grafische Darstellung zur Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$

Die periodische Kettenbruchentwicklung beginnt im Rechteck ABCD. Hier wird zunächst ein Quadrat (Kantenlänge x_2) weggenommen, dann zwei Quadrate (Kantenlänge x_3). Der verbleibende Rest ist das Rechteck A'B'C'D', in dem sich die Quadratwegnahme periodisch wiederholen soll. Damit dieses der Fall ist, müssen die Rechtecke ABCD und A'B'C'D' ähnlich sein. Das Verhältnis entsprechender Seiten der beiden Rechtecke ist gleich. $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|A'D'|}{|D'C'|}$ (1)

Für eine Vereinfachung der nachfolgenden Rechnung drücken wir alle Seitenlängen durch x_2 und x_3 aus.

$$\frac{x_2 + x_3}{x_2} = \frac{x_3}{x_2 - 2x_3}$$

$$(x_2 + x)(x_2 - 2x_3) = x_2 x_3$$

Das führt auf die Gleichung $x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$, die nach x_2 aufgelöst wird. Die geometrisch sinnvolle, positive Lösung ist

$$x_2 = x_3\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Berechnet man damit x_0 und x_1 in Abhängigkeit von x_3, so erhält man:

$$x_1 = x_2 + x_3 = x_3\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$x_0 = x_1 + x_2 = x_3\left(2+\sqrt{3}\right) + x_3\left(1+\sqrt{3}\right) = x_3\left(3+2\sqrt{3}\right)$$

Nun können wir zur Probe das Verhältnis von x_0 zu x_1 ausrechnen, das $\sqrt{3}$ sein muss.

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_3\left(3+2\sqrt{3}\right)}{x_3\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(6-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6\right)}{1} = \sqrt{3}$$

Rückblickend können wir verallgemeinernd festhalten:

Allgemein führt die Voraussetzung, dass die Kettenbruchentwicklung schließlich periodisch wird, in der grafischen Veranschaulichung auf ähnliche Rechtecke. Der Ansatz über die Verhältnisse der Seitenlängen wie in (1) führt dann immer zu einer quadratischen Gleichung, so dass in den weiteren Rechnungen nur Quadratwurzeln auftauchen