5 Die Toeplitz-Konstruktion

Periodizität

In diesem Kapitel wollen wir versuchen, Gesetzmäßigkeiten in der Papierfaltungsfolge ω mittels Betrachtungen zur Periodizität zu finden. In Kapitel 2 besagt das Translationsgesetz (Satz 2.3), dass Anfänge von Wörtern w_n in festen Abständen wieder vorkommen. Die entsprechende Aussage für die unendliche Papierfaltungsfolge ω (Satz 2.5) besagt, dass Anfänge sogar unendlich oft wiederholt werden. Beide Aussagen zielen also in Richtung auf eine Periodizität, besagen diese aber nicht.

Ganz im Gegenteil können wir mit den bereits gefundenen Gesetzmäßigkeiten beweisen, dass die Papierfaltungsfolge ω nicht periodisch ist.

Satz 5.1

Die Papierfaltungsfolge ω ist nicht periodisch.

Beweis

Annahme: ω sei periodisch mit der Periode p.
Dann folgt aus der Periodizität: $\sigma(p) = \sigma(p+p) = \sigma(p+2p) = \sigma(3p)$

Sei p zerlegt in $p = 2^a u,\ a \in \mathbb{N}_0,\ u$ ungerade .

Dann gilt nach Satz 3.2

$$\sigma(p) = \begin{cases} \text{L für } u \equiv 1 \bmod 4 \\ \text{R für } u \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Nun ist : $3p = 3 \cdot 2^a u = 2^a(3u)$

Wegen $u \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow 3u \equiv 3 \bmod 4$ und $u \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow 3u \equiv 1 \bmod 4$ gilt $\sigma(p) \neq \sigma(3p)$, was aber im Widerspruch zur Periodizität steht.

Folglich gibt es für die Papierfaltungsfolge ω keine Periode p.

Für unsere anfänglichen Untersuchungen wollen wir wieder einen induktiven Zugang wählen, indem wir mit den gefalteten Papierstreifen experimentieren. Dieses Mal jedoch nicht konkret, sondern in einem Gedankenexperiment, das sich auf unsere Erfahrungen mit den gefalteten Papierstreifen stützt.

systematisches Auffalten

Wir stellen uns vor, dass wir einen gefalteten Papierstreifen haben und ihn analysieren sollen, d.h. die zugehörige Abfolge von „L“ und „R“ finden und aufschreiben.

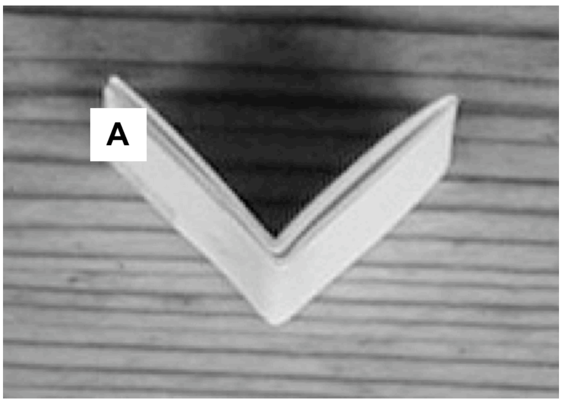


Abb. 5.1: Im ersten Schritt wird der Streifen einmal aufgefaltet und die Anfangsmarke gesucht

Unsere Analyse startet nun so, dass wir als erstes das Paket einmal auffalten und die Anfangsmarke suchen. Wenn wir nun (in Gedanken) von der Marke loslaufen, treffen wir zuerst auf einen Linksknick.

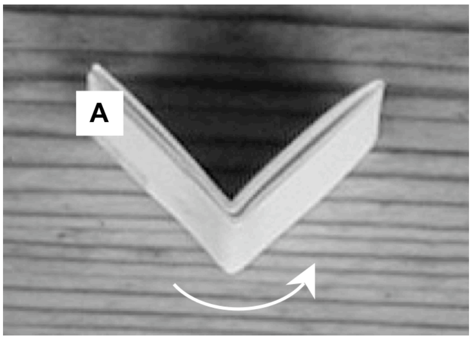


Abb. 5.2: Der erste Knick ist ein Linksknick

Das Protokoll der Analyse

In unser „Versuchsprotokoll" tragen wir also als Erstes ein „`L`" ein.

Bei der weiteren Analyse treffen wir an der anderen Seite des gefalteten Papierstreifens auf eine 180°-Kehre. Wenn wir wissen, dass der Streifen durch iteriertes Knicken nach der Vorschrift „rechts über links" entstanden ist, muss in der Kehre ein Linksknick verborgen sein. Aber so weit wollen wir mit der Analyse nicht vorauseilen, sondern wir wollen nur das notieren, was wir unmittelbar gefunden haben.

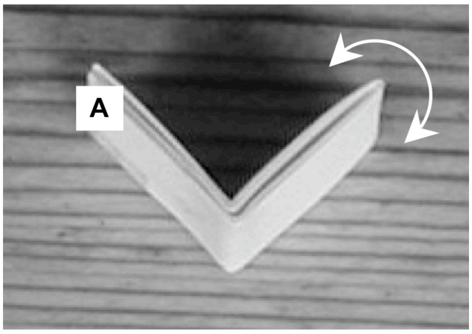


Abb. 5.3: In der Kehre könnte ein Links-, aber auch ein Rechtsknick stecken

Lücken im Protokoll

Diese Unsicherheit in der Analyse vermerken wir im „Versuchsprotokoll" durch ein „`x`", in dem also als bisherige Gesamtanalyse „`Lx`" steht.

Die weitere Analyse führt uns wieder an dem aufgefalteten Knick vorbei, dieses Mal als Rechtsknick, da wir von der anderen Seite kommen.

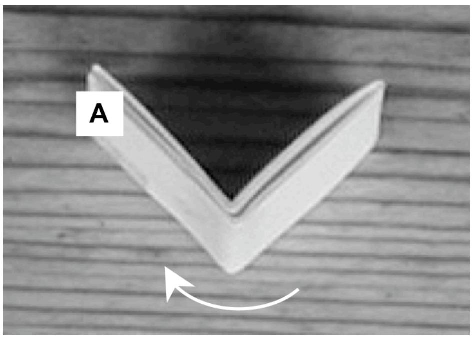


Abb. 5.4: Hier kann man einen Rechtsknick analysieren

Das Protokoll lautet nun „LxR“, und es ist klar, wie es weitergeht: unbekannte Kehre, Linksknick, unbekannte Kehre, Rechtsknick, . . . Das Protokoll lautet also „LxRxLxRxLx....“.

Das kommt uns vertraut vor und es sieht so aus, als ob wir das Inflationsgesetz ein weiteres Mal entdecken. Aber im Vergleich zu Inflationsgesetz geht es hier um das Auffalten, während die Inflation mit dem Zusammenfalten des Streifens verbunden ist. Wir gehen also umgekehrt vor. Der letzte Knick des Faltens ist nun der erste Schritt in unserer Analyse.

Aber machen wir mit dem Auffalten des Streifenpaketes weiter. Der nächste Schritt besteht darin, dass wir eine weitere Kehre zu einem 90°-Winkel auffalten.

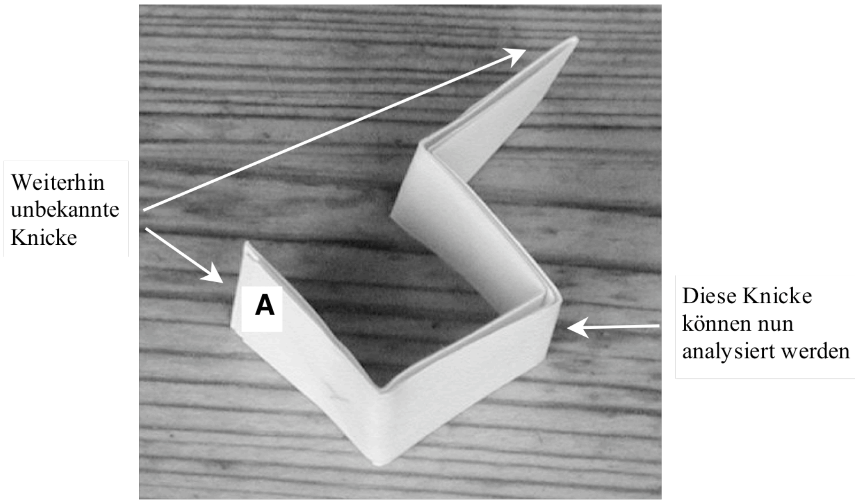


Abb. 5.5: Das Streifenpaket wird weiter aufgefaltet

Der Vollständigkeit halber laufen wir wieder an der Anfangsmarke los. Zunächst treffen wir auf einen bekannten Linksknick, um dann zum ersten Mal auf unseren neuen Knick zu stoßen: ein Linksknick.

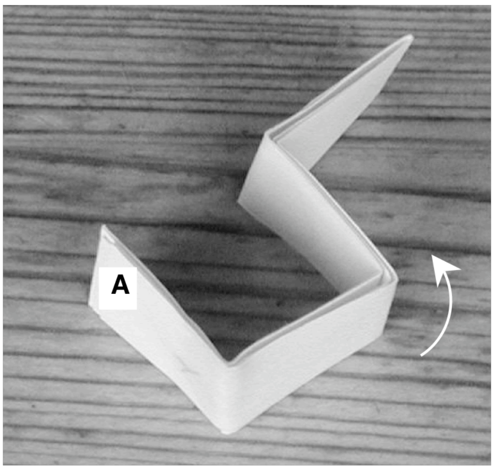


Abb. 5.6: Beim ersten Durchlaufen des neuen Knicks erhält man einen Linksknick

Die Lücken werden zum Teil geschlossen

Also können wir in unserem Protokoll das erste „x“ durch ein „L“ ersetzen und es lautet: „L**L**RxLxRxLxR....“ Über den bereits analysierten Rechtsknick kommen wir an das andere Ende des Streifenpaketes. Hier befinden sich weiterhin 180°-Kehren, die zunächst noch unbekannt sind.

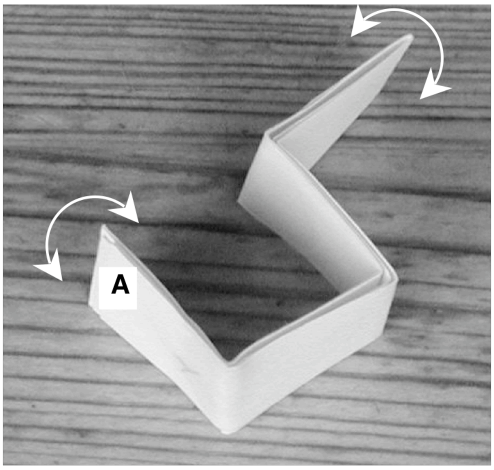


Abb. 5.7: Die Kehren an den Enden bleiben weiterhin unbekannt

Diese Unsicherheit notieren wir weiterhin mit einem „x“, so dass das Protokoll nun lautet: „LLR**x**LxRxLxR....“. Auf dem Rückweg erweist sich der neue Knick (logischerweise) als Rechtsknick, was wir dementsprechend in das Protokoll eintragen.

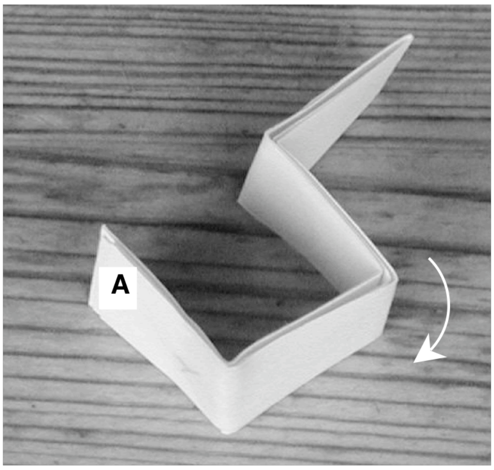


Abb. 5.8: Auf dem Rückweg erhält man einen neuen Rechtsknick

Es lautet nun: „LLRxL**R**RxLxR....“ und es ist wieder klar, wie es weitergehen wird: bekannter Rechtsknick, weiterhin unbekannte Kehre, bekannter Linksknick, neuer Linksknick, bekannter Rechtsknick, unbekannte Kehre u.s.w.

Das Protokoll sieht nun so aus: „L**L**RxL**R**RxL**L**RxL**R**Rx....“. (Alle im zweiten Schritt neu hinzugekommenen Symbole sind fett gedruckt.)

Die Systematik der Lücken

Wir unterbrechen kurz das Auffaltexperiment und wollen versuchen, ein System in der Entwicklung des Protokolls zu entdecken. Dazu schreiben wir die Protokolle nach dem ersten und zweiten Auffalten übersichtlich auf und machen uns klar, wie sie sich vom ersten zum zweiten Auffalten verändert haben.

Protokoll nach dem ersten Auffalten:	LxRxLxRxLxRxLxRx...
Protokoll nach dem zweiten Auffalten:	LLRxLRRxLLRxLRRx...
hinzugekommen ist:	L R L R

Wir sehen, dass nicht jedes „x“ ersetzt wird und dass die Ersetzungen abwechselnd durch ein „L“ bzw. „R“ geschehen. Wenn wir uns einmal aufschreiben, was an den

Stellen der „x“ im ersten Protokoll nun im zweiten Protokoll steht, erkennen wir ein einfaches Schema:

Protokoll nach dem ersten Auffalten: LxRxLxRxLxRxLxRx...
Protokoll nach dem zweiten Auffalten: LLRxLRRxLLRxLRRx...
für „x“ im ersten Prot. steht im zweiten: L x R x L x R x

Das ist nun ein überraschendes Ergebnis, denn wir sehen, dass das, was auf die Plätze der „x“ geschrieben wird, gerade wieder das erste Protokoll selbst ist.

Es erhebt sich sofort die Frage, ob es mit derselben Regelmäßigkeit so weitergeht, ob also das Protokoll für den nächsten Aufklappvorgang durch dieselbe Ersetzungsregel gebildet werden kann.

Dazu gehen wir dieses Mal umgekehrt vor, wir wenden zuerst die Ersetzungsregel an, d.h. wir ersetzen jedes noch vorhandene „x“ nacheinander durch LxRxLxRx.... Dann erhalten wir

nach dem 2.Auffalten: LLRxLRRxLLRxLRRxLLRxLRRxLLR...
für „x“ ersetzen: L x R x L x
nach dem 3.Auffalten: LLRLLRRxLLRRLRRxLLRLLRRxLLR...

Wenn wir nun im folgenden Bild auf dem ein weiteres Mal aufgeklappten Streifenpaket entlanglaufen, sehen wir, dass unser nach der Ersetzungsregel gebildetes Protokoll richtig ist.

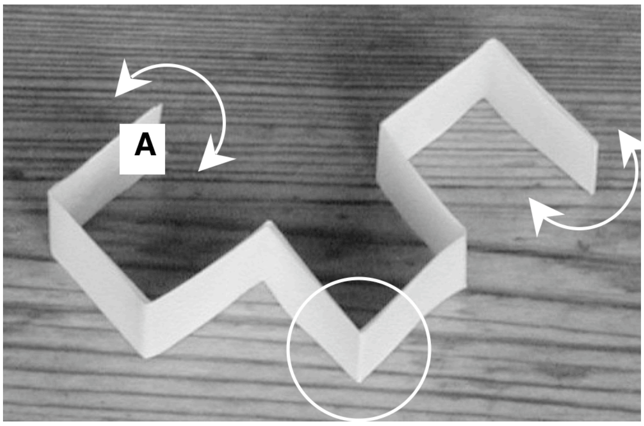


Abb. 5.9: Beim dritten Auffalten kann man den mittleren Knick neu analysieren, an den Enden bleiben unbekannte Kehren

Fassen wir das, was wir bisher erkannt haben, noch einmal zusammen, wobei wir wieder vom realen Papierfalten abstrahieren und Zeichenketten bilden:

Wir haben als erste Zeichenkette **LxRxLxRxLxRxLxRx....** hingeschrieben und weitere durch folgende Ersetzungsregel gebildet: ersetze nacheinander jedes „x“ durch ein Zeichen der Kette **LxRxLxRxLxRxLxRx....**

Wir erhalten auf diese Weise Zeichenketten, die die Papierfaltungskurven beschreiben, die durch schrittweises Aufklappen entstehen.

Die neuen Wörter sind periodisch und unendlich lang

Die LRx - Zeichenketten haben gegenüber den Wörtern w_n zwei vollkommen neue Eigenschaften: sie sind alle periodisch und unendlich lang. Aufgebaut werden sie durch die <u>drei</u> Zeichen „L“, „R“ und „x“.

1. Zeichenkette: **LxRx**LxRxLxRxLxRxLxRxLxRxLxRxLxRx...

   Periode 4

2. Zeichenkette: **LLRxLRRx**LLRxLRRxLLRxLRRxLLRxLRRx...

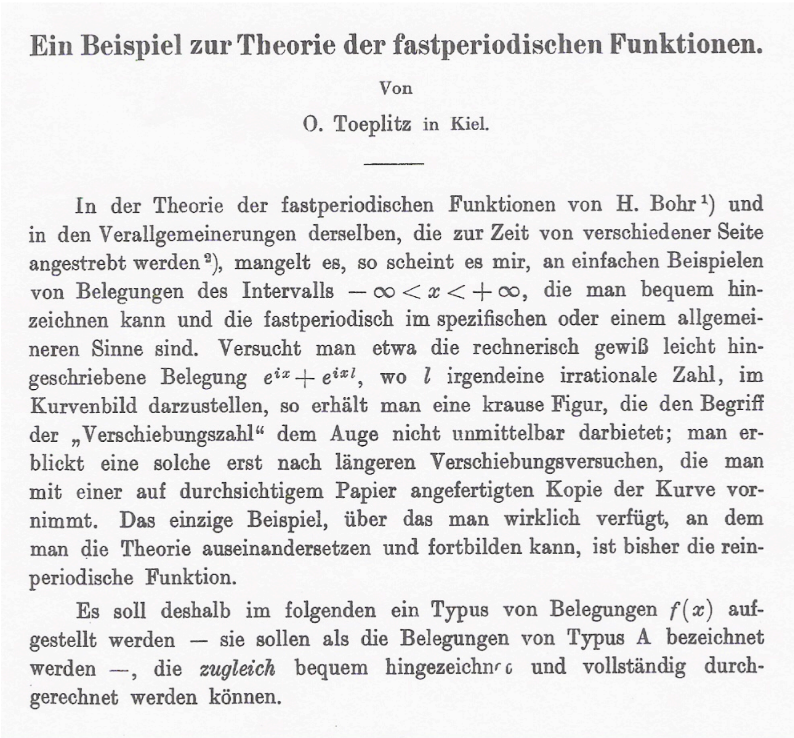
   Periode 8

3. Zeichenkette: **LLRLLRRxLLRRLRRx**LLRLLRRxLLRRLRRx...

   Periode 16

Die oben beschriebene Art des Ersetzens wurde schon 1928 von Otto Toeplitz verwendet, dieser konstruierte so allerdings aus periodischen Funktionen neue, die dann letztlich nicht periodisch waren. Obwohl wir es hier mit Wörtern und nicht mit Funktionen zu tun haben, wollen wir den dargestellten Ersetzungsprozess „Toeplitz-Konstruktion" nennen.

Ein historischer Rückblick



Ein Beispiel zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Von

O. Toeplitz in Kiel.

In der Theorie der fastperiodischen Funktionen von H. Bohr¹) und in den Verallgemeinerungen derselben, die zur Zeit von verschiedener Seite angestrebt werden²), mangelt es, so scheint es mir, an einfachen Beispielen von Belegungen des Intervalls $-\infty < x < +\infty$, die man bequem hinzeichnen kann und die fastperiodisch im spezifischen oder einem allgemeineren Sinne sind. Versucht man etwa die rechnerisch gewiß leicht hingeschriebene Belegung $e^{ix} + e^{ixl}$, wo l irgendeine irrationale Zahl, im Kurvenbild darzustellen, so erhält man eine krause Figur, die den Begriff der „Verschiebungszahl" dem Auge nicht unmittelbar darbietet; man erblickt eine solche erst nach längeren Verschiebungsversuchen, die man mit einer auf durchsichtigem Papier angefertigten Kopie der Kurve vornimmt. Das einzige Beispiel, über das man wirklich verfügt, an dem man die Theorie auseinandersetzen und fortbilden kann, ist bisher die reinperiodische Funktion.

Es soll deshalb im folgenden ein Typus von Belegungen $f(x)$ aufgestellt werden — sie sollen als die Belegungen von Typus A bezeichnet werden —, die *zugleich* bequem hingezeichnet und vollständig durchgerechnet werden können.

Abb. 5.10: Einleitung zu Otto Toeplitz' Artikel in den Mathematischen Annalen[1]

Die Toeplitz-Konstruktion für fastperiodische Funktionen

Wir wollen hier das Konstruktionsprinzip für die fastperiodischen Funktionen nachvollziehen, da daran deutlich wird, was wir mit der Toeplitz-Konstruktion meinen. Weiterhin ist, gerade für diese Arbeit, interessant, dass der Artikel von Toeplitz keine wesentlich neuen Erkenntnisse für fastperiodische Funktionen liefert, sondern in eher didaktischer Hinsicht geschrieben wurde. Er wollte vor allem etwas, was zwar im Prinzip schon klar ist, durch Beispiele erläutern, leichter verständlich und anschaulicher machen.

Otto Toeplitz wurde am 1.8.1881 in Breslau geboren. Er studierte Mathematik bis zur Promotion in seiner Heimatstadt und habilitierte sich im Jahre 1906 in Göttingen bei Hilbert. Danach lehrte er an den Universitäten Kiel und Bonn, wo er 1935 als Jude von den Nazis entlassen wurde. 1939 ging er an die Universität von Jerusalem, wo er

[1] siehe dazu [M14]

jedoch nach einer schweren Krankheit 1940 verstarb. Otto Toeplitz war sehr an der Geschichte der Mathematik, vor allem der Integralrechnung, interessiert und wollte die historische Entwicklung nutzbringend in der Lehre von Mathematik einbringen.

Für die Definition einer Funktion *f* für alle reellen Zahlen spricht Otto Toeplitz von einer „Belegung des Intervalls $-\infty < x < \infty$" und definiert sie folgendermaßen:

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = g_0(x) & \text{für} & 0 \le x < 1 \\
f(x) = g_1(x-2h-1) & \text{für} & 2h+1 \le x < 2h+2 \\
f(x) = g_2(x-4h-2) & \text{für} & 4h+2 \le x < 4h+3 \\
f(x) = g_3(x-8h-4) & \text{für} & 8h+4 \le x < 8h+5 \\
\ldots & & \\
f(x) = g_n(x-2^n h-2^{n-1}) & \text{für} & 2^n h+2^{n-1} \le x < 2^n h+2^{n-1}+1 \\
\ldots & &
\end{array}
$$

Dabei ist $h \in \mathbb{Z}$ und die Funktionen $g_k, k \in \mathbb{N}_0$ sind zunächst beliebige Funktionen, die auf dem Intervall [0,1) definiert sind.

Diese Definition ist übersichtlicher, wenn man für den linken Rand der Intervalle realisiert, dass es jeweils ein ungeradzahliges Vielfaches von Zweierpotenzen ist. Das Argument wird in den g_k jeweils um diesen linken Rand verringert.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = g_0(x) & \text{für} & 0 \le x < 1 \\
f(x) = g_1\left(x-(2h+1)\right) & \text{für} & 2h+1 \le x < 2h+2 \\
f(x) = g_2\left(x-2(2h+1)\right) & \text{für} & 2(2h+1) \le x < 4h+3 \\
f(x) = g_3\left(x-4(2h+1)\right) & \text{für} & 4(2h+1) \le x < 8h+5 \\
\ldots & & \\
f(x) = g_n\left(x-2^{n-1}(2h+1)\right) & \text{für} & 2^{n-1}(2h+1) \le x < 2^n h+2^{n-1}+1 \\
\ldots & &
\end{array}
$$

Eine Besonderheit ist das Intervall [0,1), das mit einer eigenen Funktion „belegt" wird.

Ganz im Sinne der Intention des Artikels gibt Toeplitz dann eine schematische Übersicht an, in welchen Intervallen welche der Funktionen verwendet werden:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
					g_0																						
g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1		g_1	
			g_2				g_2				g_2				g_2				g_2				g_2				
	g_3								g_3								g_3								g_3		
													g_4														
																					g_5						

Abb. 5.11: Schematische Übersicht über die Verwendung der Funktionen $g_k, k \in \mathbb{N}_0$

Wir wollen nun diese Darstellung mit unserer Toeplitz-Konstruktion für die Papierfaltungsfolge verbinden. Wir erhalten die Abfolge der Funktionen g_k über der positiven Halbachse dadurch, dass wir in das erste Intervall [1,2) g_1 schreiben, und dann durch „Lücke, g_1 " die nachfolgenden Intervalle der Länge 1 periodisch füllen.

Die verbliebenen Lücken füllen wir nun mit g_2 und der periodischen Fortsetzung von „Lücke, g_2 “. Die verbliebenen Lücken werden entsprechend mit g_3 gefüllt, u.s.w.

Toeplitz-Folge als Fachbegriff

Diese Konstruktion, die Otto Toeplitz 1928 in seinem Artikel in den Mathematischen Annalen vorgestellt hat, wurde 1969 von K. Jacobs und M. Keane (siehe [M06]) bei der Konstruktion von 0-1-Folgen (in unserer Terminologie eher Wörter über dem Alphabet {0,1}) aufgegriffen und der Begriff „Toeplitz-Folge“ (Toeplitz sequence) geprägt. Seitdem ist eine Toeplitz-Folge ein Fachbegriff, der insbesondere in der Ergodentheorie verwendet wird.

Für die exakte, mathematische Darstellung werden wir wieder einen Operator für die Toeplitz-Konstruktion definieren. Dafür benötigen wir aber zunächst noch die Definition einer Funktion, die Hilfscharakter hat.

Definition 5.1

Sei A ein Alphabet und A* die Menge aller Wörter über diesem Alphabet. Dann sei $\nu : A \times A^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die dem Tripel (S,u,k) die Anzahl des Vorkommens des Symbols $S \in A$ im Wort $u \in A^*$ von der ersten bis zur k-ten Stelle, $k \in \mathbb{N}$ zuordnet.

Beispiel

Ist A = {L, R, x} und u = LxRxLxRx..., so ist ν(L,u,4) = 1, da das Symbol „L“ im Wort u von der 1. bis zur 4. Stelle einmal vorkommt. ν(x,u,7) = 3, da „x“ auf den ersten sieben Plätzen von u dreimal vorkommt.

Definition 5.2

Sei A = {L, R, x} ein Alphabet mit 3 Symbolen und $\hat{t}$ ein unendlich langes Wort aus A^* mit $\hat{t}$ = LxRxLxRx...

Der Toeplitz-Operator

Der Operator $T : A^* \to A^*$ heißt Toeplitz-Operator und erzeugt aus einem unendlich langen Wort $t = S_1S_2S_3S_4...$ ein neues Wort nach der Vorschrift:

$$T(t) = U_1U_2U_3U_4... \text{ mit } U_i = \begin{cases} S_i \text{ falls } S_i \in \{\mathrm{L},\mathrm{R}\} \\ \tilde{\sigma}(\hat{t},k) \text{ falls } S_i = \mathrm{x} \text{ und } \nu(\mathrm{x},t,i) = k \end{cases}$$

Der Toeplitz-Operator ist die formalisierte Ersetzung aller „x“ in einem Wort durch die Symbole des Wortes $\hat{t}$ = LxRxLxRx... . Die iterierte Anwendung des Toeplitz-Operators erzeugt eine Folge von (unendlich langen) Wörtern.

Definition 5.3

Eine neue Folge von Wörtern

$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von unendlich langen Wörtern, die folgendermaßen rekursiv definiert sind:

$t_1 = \hat{t}$ = LxRxLxRx... und $t_{n+1} = T(t_n)$

Wir wenden uns nun den Eigenschaften zu, die die Wörter der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben. Insbesondere gilt es, den Zusammenhang zu den Wörtern w_n herzustellen und damit letztlich mit der Papierfaltungsfolge ω.

Zunächst vereinfachen wir die Konstruktion der Wörter der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 5.2

Für alle $n, i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \mathrm{x} \Leftrightarrow i = k \cdot 2^n$

In Worten ausgedrückt besagt der Satz, dass im Wort t_n die Symbole „x“ genau an den Positionen stehen, die Vielfaches der Zweierpotenz 2^n sind.

Beweis (vollständige Induktion über *n*)

Induktionsanfang: $n = 1$

In t_1 stehen die „x“ genau an den Plätzen mit geraden Nummern, also

$\tilde{\sigma}(t_1, i) = \mathrm{x} \Leftrightarrow i = 2k = k \cdot 2^1$

Induktionsvoraussetzung: $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \mathrm{x} \Leftrightarrow i = k \cdot 2^n$

Induktionsbehauptung: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \mathrm{x} \Leftrightarrow i = k \cdot 2^{n+1}$

Induktionsbeweis:

$"\Leftarrow"$

Es sei $i = k \cdot 2^{n+1}$. Wir betrachten $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, k \cdot 2^{n+1}) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, 2k \cdot 2^n)$

Nach der iterativen Bildung von t_{n+1} aus t_n über den Toeplitz-Operator bestimmt die Stelle $2k \cdot 2^n$ im Wort t_n, was an der Stelle $2k \cdot 2^n$ im Wort t_{n+1} steht.

$\tilde{\sigma}(t_n, 2k \cdot 2^n) = \mathrm{x}$	Nach Induktionsvoraussetzung steht an der Position $2k \cdot 2^n$ im Wort t_n ein „x“.
$\nu(\mathrm{x}, t_n, 2k \cdot 2^n) = 2k$	In t_n muss abgezählt werden, wie viele „x“ in t_n bis zur Position $2k \cdot 2^n$ stehen. Das sind wegen der Induktionsvoraussetzung genau $2k$.
$\tilde{\sigma}(t_1, 2k) = \mathrm{x}$	An der Position $2k$ steht in t_1 ein „x“.

Also gilt $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \mathrm{x}$ wenn $i = k \cdot 2^{n+1}$.

$"\Rightarrow"$

Es sei $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \mathrm{x}$. Wegen $t_{n+1} = T(t_n)$ kann in t_n an der Stelle i kein „L“ oder „R“ stehen, denn dann wäre $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i)$ auch „L“ oder „R“.

$\Rightarrow \tilde{\sigma}(t_n, i) = \mathrm{x}$ Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $i = k \cdot 2^n$ und $\nu(\mathrm{x}, t_n, k \cdot 2^n) = k$, d.h. es stehen bis zur Position $i = k \cdot 2^n$ k Mal „x“.

Nach der iterativen Bildung von t_{n+1} aus t_n mit dem Toeplitz-Operator gilt $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \mathrm{x} = \tilde{\sigma}(t_1, k)$. Damit gilt aber, dass k gerade ist: $k = 2k'$, $k' \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in i ergibt sich $i = 2k' \cdot 2^n = k' \cdot 2^{n+1}$.

Folgerung

$$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k \cdot 2^n) = \tilde{\sigma}(t_1, k) = \begin{cases} \mathrm{x} \text{ für } k \equiv 0 \bmod 2 \\ \mathrm{L} \text{ für } k \equiv 1 \bmod 4 \\ \mathrm{R} \text{ für } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

In t_n stehen an den Positionen $k \cdot 2^n$ „x“, und zwar ist dieses „x“ das k-te. Folglich wird das „x“ in t_{n+1} durch das k-te Symbol aus t_1 ersetzt.

Nach diesem Satz, der eher vorbereitenden Charakter hat, können wir nun wesentliche Aussagen zu den mit dem Toeplitz-Operator erzeugten Wörtern der Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ machen.

Die Wörter t_n sind periodisch

Satz 5.3

t_n ist periodisch mit der Periode 2^{n+1}.

Beweis (vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 1$: t_1 = LxRxLxRx... hat die Periode $4 = 2^{1+1}$
Induktionsvoraussetzung: t_n ist periodisch mit der Periode 2^{n+1}.
Induktionsbehauptung: t_{n+1} ist periodisch mit der Periode 2^{n+2}.
Induktionsbeweis: Zu zeigen ist: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, i + 2^{n+2}),\ i \in \mathbb{N}$

Fall 1: $i = k \cdot 2^n,\ k \in \mathbb{N}$

Nach Satz 5.2. Folgerung gilt: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k \cdot 2^n) = \tilde{\sigma}(t_1, k) = \begin{cases} \text{x für } k \equiv 0 \bmod 2 \\ \text{L für } k \equiv 1 \bmod 4 \\ \text{R für } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$

$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k \cdot 2^n + 2^{n+2}) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, (k+4) \cdot 2^n) = \tilde{\sigma}(t_1, k+4)$

Da t_1 nach Induktionsanfang die Periode 4 hat, gilt:
$\tilde{\sigma}(t_1, k) = \tilde{\sigma}(t_1, k+4)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Fall 2: $i \neq k \cdot 2^n,\ k \in \mathbb{N}$

Nach Satz 5.2 steht in t_n an der Position i dann kein „x“. Nach der iterativen Bildung von t_{n+1} aus t_n mit dem Toeplitz-Operator gilt also $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_n, i)$

Die Position $i + 2^{n+2}$ ist dann ebenfalls kein Vielfaches von 2^n. Also gilt:
$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i + 2^{n+2}) = \tilde{\sigma}(t_n, i + 2^{n+2}) = \tilde{\sigma}(t_n, i + 4 \cdot 2^n)$

Da t_n nach Induktionsvoraussetzung die Periode 2^n hat, gilt:
$\tilde{\sigma}(t_n, i) = \tilde{\sigma}(t_n, i + 4 \cdot 2^n)$

Natürlich wollen wir letztlich zeigen, dass die mit der Toeplitz-Konstruktion gebildeten Wörter in engem Zusammenhang mit den Wörtern w_n stehen, die nach dem Reflexionsgesetz gebildet wurden. Dazu brauchen wir jedoch noch einen vorbereitenden Satz.
Zunächst erweitern wir das „Reflektieren“, geschrieben mit dem „Quer“-Zeichen, (siehe Definition 2.1):

Definition 5.4

Es sei A = {L,R,x} ein Alphabet mit 3 Symbolen und $S \in A$.

Dann bedeutet $\overline{S} = \begin{cases} \text{L } \textit{für } S = \text{R} \\ \text{R } \textit{für } S = \text{L} \\ \text{x } \textit{für } S = \text{x} \end{cases}$

Satz 5.4

Symmetrien innerhalb der Wörter

Für alle $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N},\ i < k \cdot 2^n$ gilt: $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_n, k \cdot 2^{n+1} - i)}$

Das heißt, dass man in jedem Wort t_n den Teil vor einem beliebigen „x“ an dem „x“ spiegeln kann und dann den entsprechenden (endlichen) Teil nach dem „x“ erhält.

Beweis (vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 1$ zu zeigen ist: $\tilde{\sigma}(t_1, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_1, k \cdot 4 - i)}$

Der Abstand d zwischen den beiden Platznummern ist
$d = |4k - i - i| = |4k - 2i| = 2\,|2k - i|$

Fall 1: i gerade
$i = 2m,\ m \in N \Rightarrow \tilde{\sigma}(t_1, i) = \text{x}$ nach Satz 5.2
$d = 2\,|2k - 2m| = 4\,|k - m|$ Da t_1 die Periode 4 hat, ist
$\tilde{\sigma}(t_1, i) = \text{x} = \tilde{\sigma}(t_1, 2m) = \tilde{\sigma}(t_1, 2m + d)$ und da $\text{x} = \overline{\text{x}}$ ist auch $\tilde{\sigma}(t_1, 2m) = \overline{\tilde{\sigma}(t_1, 2m + d)}$

Fall 2: i ungerade
$i = 2m-1,\ m \in N \Rightarrow \tilde{\sigma}(t_1, i) \in \{\mathrm{L},\mathrm{R}\}$ nach Satz 5.2
$d = 2\,|\,2k-2m+1\,| = 2\,|\,2(k-m)+1\,|$, also das Doppelte einer ungeraden Zahl. Bei diesem Abstand bewegt man sich in t_1 von einem „L“ zu einem „R“ oder umgekehrt von einem „R“ zu einem „L“. Also gilt $\tilde{\sigma}(t_1, 2m-1) = \overline{\tilde{\sigma}(t_1, 2m-1+d)}$

Induktionsvoraussetzung: Für t_n gilt: $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_n, k\cdot 2^{n+1} - i)}$

Induktionsbehauptung: Für t_{n+1} gilt: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k\cdot 2^{n+2} - i)}$

Induktionsbeweis:
<u>Fall 1:</u> $i = 2m\cdot 2^n,\ m \in \mathbb{N}$

d.h. i ist ein geradzahliges Vielfaches von 2^n
Also gilt nach Satz 5.2: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, 2m\cdot 2^n) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, m\cdot 2^{n+1}) = \mathrm{x}$

Der Abstand d zwischen den Platznummern i und $k\cdot 2^{n+2} - i$ ist
$d = |\,k\cdot 2^{n+2} - i - i\,| = |\,k\cdot 2^{n+2} - 2m\cdot 2^{n+1}\,| = 2^{n+2}\,|\,k-m\,|$

Nach Satz 5.3 hat t_{n+1} die Periode 2^{n+2}, also ist $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, m\cdot 2^{n+1}) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, m\cdot 2^{n+1} + d) = \mathrm{x}$

und da $\mathrm{x} = \overline{\mathrm{x}}$ gilt $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, m\cdot 2^{n+1}) = \overline{\tilde{\sigma}(t_{n+1}, m\cdot 2^{n+1} + d)}$

<u>Fall 2:</u> $i = (2m-1)\cdot 2^n,\ m \in \mathbb{N}$

d.h. i ist ein ungeradzahliges Vielfaches von 2^n
Dann ist nach Satz 5.2 Folgerung $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, (2m-1)\cdot 2^n) = \tilde{\sigma}(t_1, 2m-1)$

Wegen $k\cdot 2^{n+2} - i = k\cdot 2^{n+2} - (2m-1)\cdot 2^n = 2^n(4k-2m+1)$ ist ebenso
$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k\cdot 2^{n+2} - (2m-1)\cdot 2^n) = \tilde{\sigma}(t_1, 4k-2m+1)$. Der Abstand d der beiden Platznummern in t_1 ist $d = |\,(4k-2m+1)-(2m-1)\,| = |\,4k-4m+2\,| = 2\,|\,2(k-m)+1\,|$, also ist d das Doppelte einer ungeraden Zahl. Bei diesem Abstand bewegt man sich in t_1 von einem „L“ zu einem „R“ oder umgekehrt von einem „R“ zu einem „L“. Also gilt in t_1
$\tilde{\sigma}(t_1, 2m-1) = \overline{\tilde{\sigma}(t_1, 4k-2m+1)}$ und damit in t_{n+1}
$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, (2m-1)\cdot 2^n) = \overline{\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k\cdot 2^{n+2} - (2m-1)\cdot 2^n)}$

<u>Fall 3:</u> $i \neq m\cdot 2^n,\ m \in \mathbb{N}$

d.h. i ist kein Vielfaches von 2^n
Nach Satz 5.2 ist dann $\tilde{\sigma}(t_n, i) \in \{\mathrm{L},\mathrm{R}\}$.

Nach der iterativen Bildung von t_{n+1} aus t_n mit dem Toeplitz-Operator gilt
$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_n, i)$.

Die Position $k\cdot 2^{n+2} - i$ ist dann kein Vielfaches von 2^n, also gilt ebenfalls
$\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k\cdot 2^{n+2} - i) = \tilde{\sigma}(t_n, k\cdot 2^{n+2} - i)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt in t_n für jedes $k' \in \mathbb{N}$ $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_n, k'\cdot 2^{n+1} - i)}$,

folglich gilt auch $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_n, k\cdot 2^{n+2} - i)}$ also auch $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_{n+1}, k\cdot 2^{n+2} - i)}$

Der Zusammenhang mit den Papierfaltungswörtern

In Kapitel 2 hatten wir die Wörter w_n mit dem Reflexionsgesetz konstruiert. Sie stellten in abstrakter Weise den gefalteten Papierstreifen dar. Die mit der Toeplitz-Konstruktion erzeugten Wörter t_n gehen ebenfalls aus den gefalteten Papierstreifen hervor. Wie finden wir in den unendlichen Wörtern t_n die endlichen Wörter w_n wieder? Die Bilder am Anfang dieses Kapitels zeigen, dass wir beim Auffalten die ersten Stufen der Papierfaltungskurve sehen, nur durchlaufen wir sie, mit unbekannten Kehren an den Enden, beliebig oft. Dann muss der Anfang der Toeplitz-Zeichenkette bis zum ersten „x“ mit einem Wort w_n übereinstimmen.

Schauen wir uns das einmal in einer Tabelle an:

1. Stufe:	**L**xRxLxRxLxRxLxRxLxRxLxRxLxRxLxRx...
ersetzen:	L x R x L x R x L x R x L x R x
2. Stufe:	**LLR**xLRRxLLRxLRRxLLRxLRRxLLRxLRRx...
ersetzen:	L x R x L x R x
3. Stufe:	**LLRLLRR**xLLRRLRRxLLRLLRRxLLRRLRRx...
ersetzen:	L x R x
4. Stufe:	**LLRLLRRLLLRRLRR**xLLRLLRRxLLRRLRRx...

Wir sehen deutlich, wie am Anfang bis zum ersten „x“ die Wörter w_1 bis w_4 entstehen.

Von Schritt zu Schritt wird das erste „x“ durch ein „L“ ersetzt und dadurch die Verbindung zum nächsten LR-Abschnitt hergestellt. Das zweite „x“ bleibt jeweils erhalten und markiert das Ende für die endliche Interpretation als Wort w_n. Dieser Vorgang erinnert sehr stark an den Reflexionsvorgang „schreibe ein „L“ an das Ende und spiegele dann die alte Zeichenkette“ (siehe dazu auch den Satz 5.4).

Diese Eigenschaft wollen wir im nachfolgenden Theorem allgemein formulieren und beweisen.

Toeplitz-Konstruktion und Reflexionsgesetz

Theorem 5.5

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{N},\ i \le 2^n - 1$ gilt $\tilde{\sigma}(w_n, i) = \tilde{\sigma}(t_n, i)$.

Beweis (vollständige Induktion über *n*)

Induktionsanfang: n = 1

In t_1 = LxRxLxRx... ist das erste Symbol „L“ und w_1= L

Induktionsvoraussetzung:

Für alle $k \in \mathbb{N},\ k \le n$ und alle $i \in \mathbb{N},\ i \le 2^k - 1$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_k, i) = \tilde{\sigma}(t_k, i)$.

Induktionsbehauptung:

Für alle $i \in \mathbb{N},\ i \le 2^{n+1} - 1$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, i)$.

Induktionsbeweis:

$1 \le i \le 2^n - 1$

Nach Satz 5.2 und der iterativen Bildung der t_n mit dem Toeplitz-Operator gilt: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_n, i)$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $i \in \mathbb{N},\ i \le 2^n - 1$ $\tilde{\sigma}(t_n, i) = \tilde{\sigma}(w_n, i)$

Nach Satz 2.2 a) gilt $\tilde{\sigma}(w_n, i) = \tilde{\sigma}(w_{n+1}, i)$

Folglich gilt $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, i)$

$i = 2^n$

Nach der Folgerung von Satz 5.2 gilt: $\tilde{\sigma}(t_{n+1}, 2^n) = \text{L}$

Nach Satz 2.2 b) gilt: $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^n) = \text{L}$

Folglich gilt $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1}, i)$

$2^n \le i \le 2^{n+1} - 1$

Da dieser Beweisabschnitt etwas unübersichtlicher von der Struktur ist und in diesen zentrale Eigenschaften der Wörter w_n und t_n einfließen, wollen wir den Beweis mit einer Skizze unterstützen.

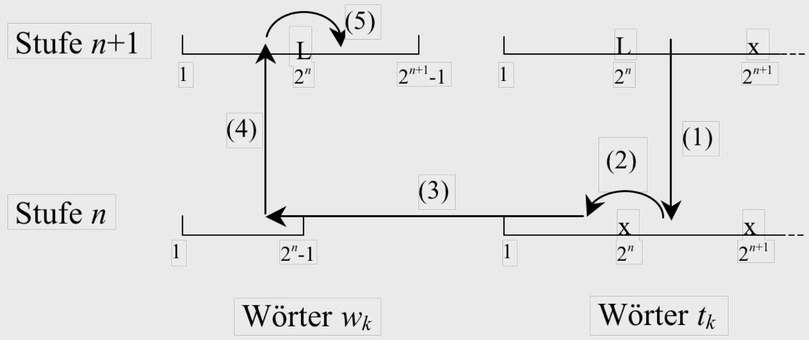


Abb. 5.12: Schematischer Ablauf des Beweises

(1) $\tilde{\sigma}(t_{n+1},i) = \tilde{\sigma}(t_n,i)$ nach Satz 5.2 und der iterativen Bildung der t_n mit dem Toeplitz-Operator

(2) $\tilde{\sigma}(t_n,i) = \overline{\tilde{\sigma}(t_n,2^{n+1}-i)}$ nach Satz 5.4 mit $k = 1$

Für die nächsten Schritte nehmen wir eine Indextransformation vor:
$2^{n+1} - i = j$ und damit $2^n < i \leq 2^{n+1} - 1 \Rightarrow 1 \leq j < 2^n$

(3) $\tilde{\sigma}(t_n,j) = \tilde{\sigma}(w_n,j)$ nach Induktionsvoraussetzung

(4) $\tilde{\sigma}(w_n,j) = \tilde{\sigma}(w_{n+1},j)$ nach der iterativen Bildung der w_n mit dem Reflexionsoperator (Def. 2.3)

(5) $\tilde{\sigma}(w_{n+1},j) = \overline{\tilde{\sigma}(w_{n+1},2^{n+1}-j)}$ nach Satz 2.2 c)

Mit der Rücktransformation $2^{n+1} - j = i$ auf den Index i erhalten wir:
$\overline{\tilde{\sigma}(w_{n+1},2^{n+1}-j)} = \overline{\tilde{\sigma}(w_{n+1},i)}$

Mit Querung der Schritte (3) bis (5) ergeben die Schritte (1) bis (5) die zu zeigende Aussage: $\tilde{\sigma}(w_{n+1},i) = \tilde{\sigma}(t_{n+1},i)$

Die drei iterativen Bildungsgesetze sind äquivalent

Die Toeplitz-Konstruktion ist nach dem Reflexions- und dem Inflationsgesetz die dritte Gesetzmäßigkeit, die ein iteratives Bilden der Wörter w_n beschreibt. Das Theorem 5.5 beweist diesen Zusammenhang. Die Toeplitz-Konstruktion wurde wie das Reflexions- und das Inflationsgesetz induktiv entdeckt, wir sind von der Welt der realen Papierstreifen vorgedrungen in die abstrakte Welt der Wörter und haben anschließend unser vielfältig erworbenes Wissen miteinander verknüpft.

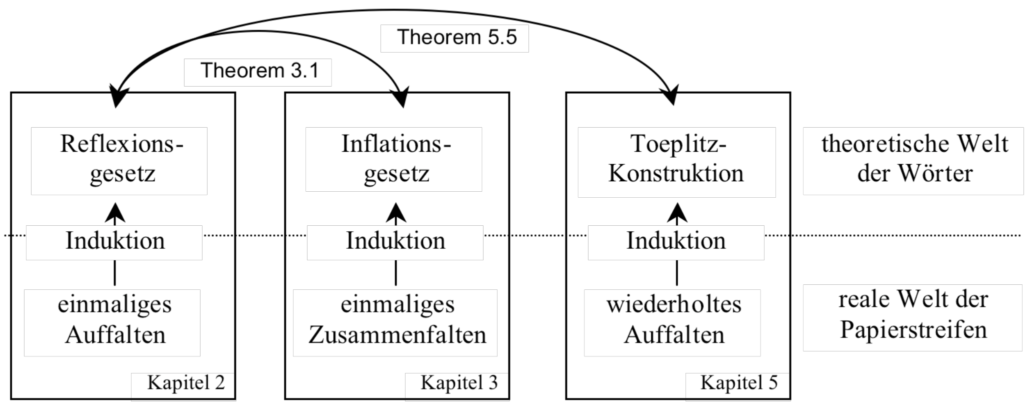


Abb. 5.13: Übersicht über die gefundenen Gesetze

Baumdiagramme

In Kapitel 3 hatten wir das Inflationsgesetz mit einem Baumdiagramm in Zusammenhang gebracht und erläutert. Auch das Vorgehen bei der Toeplitz-Konstruktion lässt sich anschaulich an einem Baumdiagramm erläutern und beide Gesetze werden hierüber verbunden.

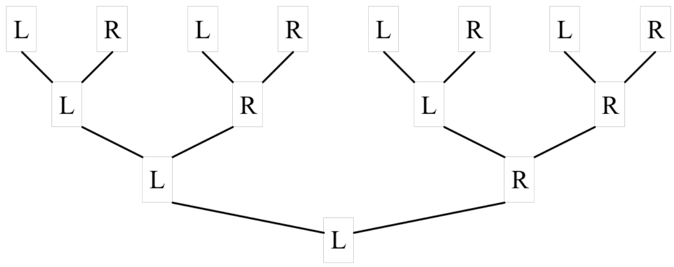


Abb. 5.14: Das Baumdiagramm zum Wort w_4

Dabei setzt der Inflationsvorgang den Baum fort, indem er an die oberen Enden eine weitere Stufe der Verzweigung hängt (siehe Abb. 3.12). Der Baum wird dort von unten nach oben gebaut und von Stufe zu Stufe umfangreicher, auf jeder Stufe ist er endlich groß.

Baumdiagramm und Toeplitz-Konstruktion

Erläutert man die Toeplitz-Konstruktion in einem Baumdiagramm, so muss man mit einem Baum arbeiten, der unendlich groß (nach unten fortgesetzt) ist, da die Wörter t_n auch unendlich lang sind. Der Baum ist also schon am Anfang in seiner Gesamtheit vorhanden, er wird nur von Stufe zu Stufe aufgedeckt. Dabei entsprechen die aufgedeckten Teile des Baums den Symbolen „L“ und „R“ und die verdeckten Teile des Baums den Symbolen „x“.

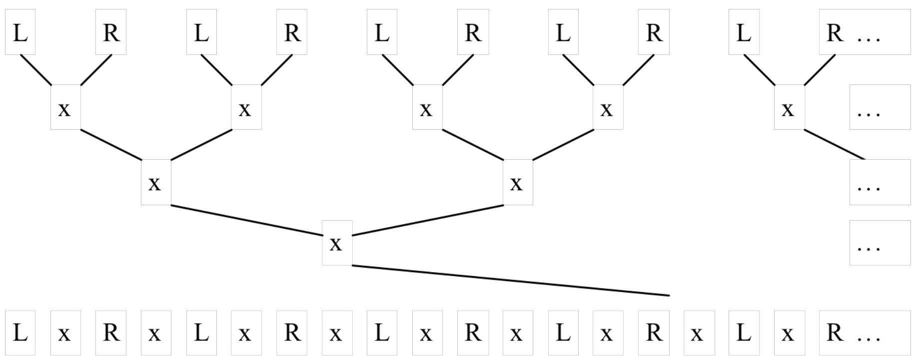


Abb. 5.15: Das Baumdiagramm zum Wort t_1 = LxRxLxRx...

Das erste Wort t_1 ist die oberste Reihe der nebeneinander stehenden „L“ und „R“, alle darunter liegenden Symbole sind unbekannt und durch ein „x“ dargestellt.

Im nächsten Schritt vom Wort t_1 zu t_2 wird durch den Einfügungsprozess die zweite Zeile aufgedeckt, die weiterhin erscheinenden „x“ sind die der tiefer liegenden, unaufgedeckten Zeilen.

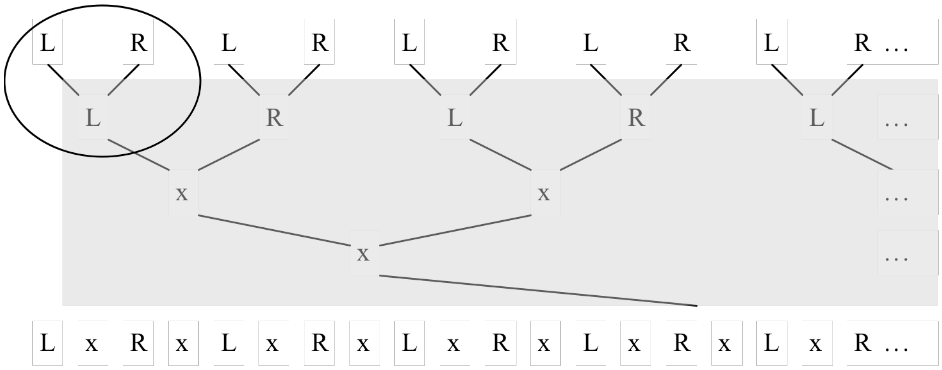


Abb. 5.16: Das Baumdiagramm nach dem ersten Ersetzungsprozess. Der grau unterlegte Teilbaum entspricht dem Wort t_1 und damit dem Diagramm in Abb. 5.15.

Man kann sich den Ersetzungsprozess im Baum so vorstellen, dass der gesamte Baum zum Wort t_1 dupliziert wird und eine Stufe tiefer auf alle Plätze gesetzt wird, die bis dahin noch nicht aufgedeckt sind, an denen also ein „x“ steht.

Dieser Prozess wird iteriert und so schrittweise der gesamte Baum von oben nach unten aufgedeckt.

Die endlichen Wörter w_n finden wir in dem Gesamtbild als den Teilbaum, der links oberhalb des obersten, linken „x“ steht. (siehe Abb. 5.16 eingekreist)

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

Neben den im Artikel dargestellten Betrachtungen zum sukzessiv voranschreitenden Auffalten eines Papierstreifens und dessen Analyse kann man im Unterricht für eine vertiefte Übung eine Folge von Wörtern konstruieren, die näher am ursprünglichen Konstruktionsprozess von Toeplitz liegt.

Unterrichtsvorschlag

angesprochene schulmathematische Themen

(Periodizität), Potenzrechnung, exponentielles Wachstum

Aufgabenstellung

Über dem Alphabet aller großen Buchstaben und dem kleinen „x“ werden folgendermaßen unendlich lange Wörter konstruiert.

w_A = `AxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxAxA...`

w_B = `ABAxABAxABAxABAxABAxABAxABAxABAxABAxABAxABAxABA...`

w_C = `ABACABAxABACABAxABACABAxABACABAxABACABAxABACABA...`

u.s.w.

1. Jedes Wort ist periodisch. Wie entwickelt sich die Periode?
2. An welchen Positionen steht der Buchstabe „N“?
3. In welchem Wort kommt zum ersten Mal unter den ersten 1000 Buchstaben kein „x“ vor?
4. Wie bestimmt man den Buchstaben für einen gegebenen Platz in einem gegebenen Wort?

Lösungen

Aufgabe 4 ist die angestrebte Fragestellung, die vorhergehenden Fragen dienen nur einer Vorbereitung und Hinführung. Bei einer offeneren, selbstständigeren Arbeitsweise kann man sofort die Aufgabe 4 stellen.

zu 1.

Offensichtlich wird die Periode durch das „x“ bestimmt. Es schließt jeweils einen Block ab. Da immer das erste „x“ ersetzt wird, wird von Wort zu Wort die Periode verdoppelt. Die Gesetzmäßigkeit wird in einer kleinen Tabelle deutlich:

Wort	w_A	w_B	w_C	w_D	w_E	w_F	w_G
Nr. des Index-Buchstabens im Alphabet	1	2	3	4	5	6	7
Periodenlänge	2	4	8	16	32	64	128

Folglich gilt für den k-ten Buchstaben des Alphabets, dass das zugehörige Wort eine Periode von 2^k hat.

zu 2.

Diese Frage steht mit Frage 1 in unmittelbarem Zusammenhang. Jeder neue Buchstabe wird auf einer Position eingefügt, wo im vorhergehenden Wort ein „x“ in einer ungeradzahligen Wiederholung steht. Da das „x“ das Ende eines Blockes markiert, der periodisch wiederholt wird, ist das Ergebnis im Prinzip das aus Aufgabe 1, wie eine Tabelle zeigt.

Wort	w_A	w_B	w_C	w_D	w_E
Nr. des Index-Buchstabens im Alphabet	1	2	3	4	5
die ersten drei Positionen für diesen Buchstaben	1, 3, 5	2, 6, 10	4, 12, 20	8, 24, 40	16, 48, 80

Die Frage nach dem ersten Auftauchen des Buchstaben „N“ erfordert die Formulierung einer funktionalen Berechnung der Positionen.

Nummer des Buchstabens im Alphabet: n

Positionen für diesen Buchstaben: $2^{n-1}\left(2k-1\right)$, $k=1,2,3,4,...$

Da „N“ der 14. Buchstabe im Alphabet ist, sind die Positionen für N $2^{13}\left(2k-1\right)$ $=8192\cdot(2k-1)=8192+(k-1)\cdot 16384$

zu 3.

Hier werden die Fragen aus 1. und 2. praktisch umgekehrt. Man kann die Fragestellung passend zur Frage 1 formulieren: In welchem Wort ist zum ersten Mal die Periode größer als 1000? Da die Periodenlänge eine Zweierpotenz ist und da $2^{10}>1000$ ist, erfüllt das 10. Wort die Bedingung. Der 10. Buchstabe des Alphabets ist „J“. Folglich sind in w_J die ersten 1000 Buchstaben ohne „x“.

zu 4.

Gegeben ist die Position m und das Wort zum n-ten Buchstaben im Alphabet.

Man zerlegt $m = 2^a \cdot u,\ a \in \mathbb{N},\ u$ ungerade . Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass alle „x“ im Wort zum n-ten Buchstaben auf Vielfachen von 2^n stehen. Ist also $a \geq n$, so steht an der Position m ein „x“. Ist $a < n$, so wissen wir aus Aufgabe 2, dass dort der (a+1)-te Buchstabe des Alphabets steht.