

4 Die geometrische Interpretation

In diesem und in den nachfolgenden Kapiteln werden wir verschiedene Gebiete der Mathematik heranziehen, um die komplexe Struktur der Papierfaltungswörter weiter zu analysieren und zu verstehen. In diesem Kapitel geben wir den Knickfolgen eine geometrische Interpretation, was eine ganz wichtige und herausragende Betrachtungsweise ist, die in nachfolgenden Kapiteln wieder aufgegriffen wird.

Wir markieren wieder einen Papierstreifen am linken Ende und falten ihn auf die gewohnte Weise, z.B. drei Mal. Für die weitere Betrachtung ziehen wir nun den Streifen nicht einfach auseinander, sondern biegen die Streifenabschnitte so weit auseinander, dass die Papiersegmente Winkel von 90° bilden.

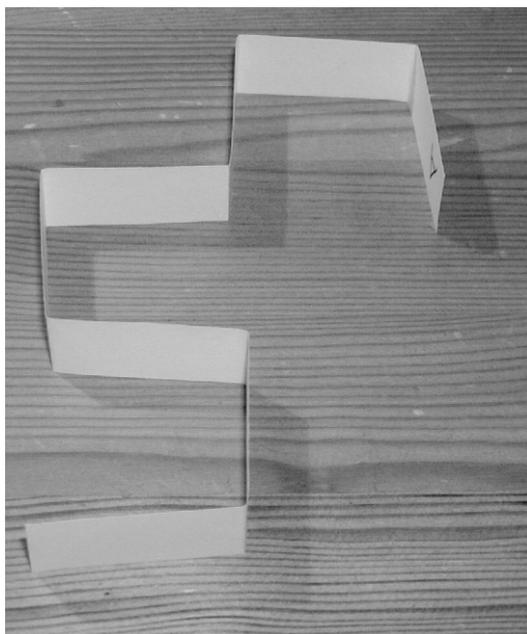


Abb. 4.1: Der Papierstreifen der 3. Stufe, auf 90° aufgefalted

Die nächste Abbildung zeigt in einem computergenerierten Bild die ersten fünf Stufen der auf 90° aufgefalteten Papierstreifen.

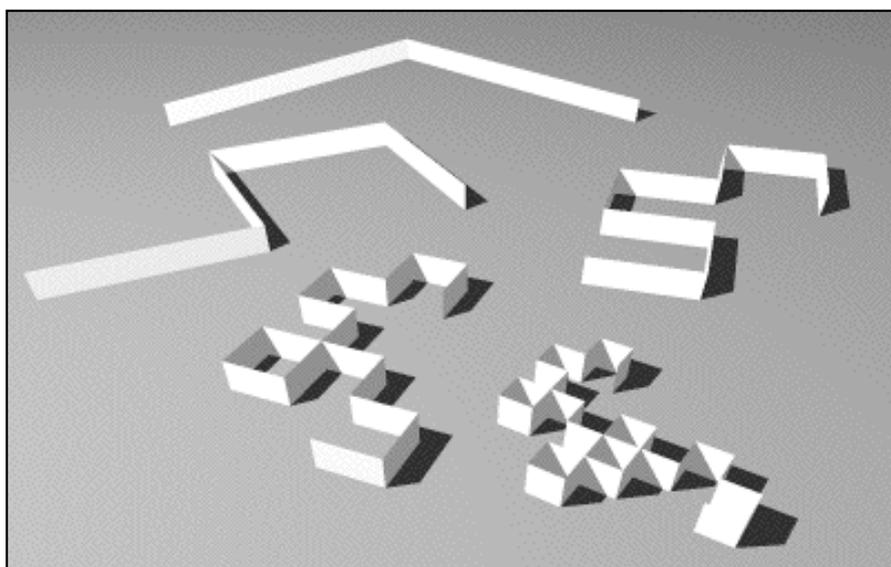


Abb. 4.2: Die Stufen 1 bis 5 der auf 90° aufgefalteten Papierstreifen

Für einfachere, schematische Darstellungen zeichnen wir die Papierstreifen nur noch als Polygonzug, wobei wir senkrecht von oben auf die obere Kante des Papierstreifens schauen und seine Breite vernachlässigen. Für das Erkunden von Regelmäßigkeiten werden die Papierstreifen so ausgerichtet, dass der erste Abschnitt von der Anfangsmarke A nach oben zeigt und der zweite Abschnitt nach links. Ein abschließender Test besteht darin, dass der letzte Abschnitt nach links weisen muss. In dieser Darstellung sehen dann die ersten 5 Stufen folgendermaßen aus.

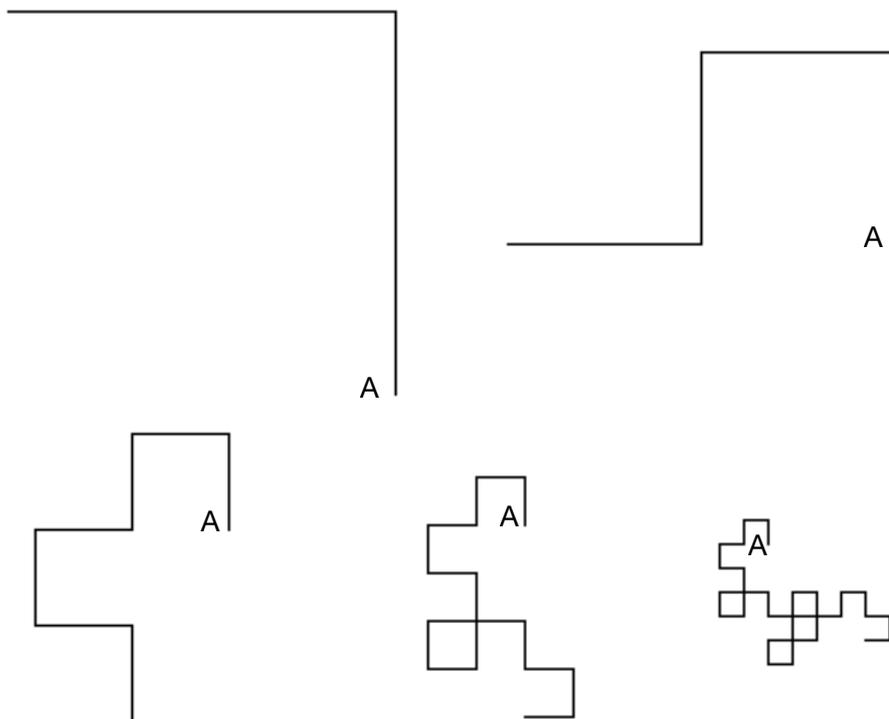


Abb. 4.3: Die ersten fünf Stufen des Papierfaltens in der Polygondarstellung

In dieser schematischen Darstellung können wir deutlich erkennen dass

- die Kantenlänge von Stufe zu Stufe halbiert wird.
- die erste Hälfte eines Polygons die verkleinerte Kopie der vorhergehenden Stufe ist.

Begründung für die Codierung mit L und R

Dieser Darstellung entstammt auch die Kodierung der Knicke mit „L“ und „R“. Wenn wir auf einer Linie entlang laufen, ist jeder Knick eine Links- oder Rechtskurve, die konsequenter Weise mit „L“ oder „R“ abgekürzt wird. Die Orientierung der Papierstreifen sorgt dafür, dass die erste Kurve immer eine Linkskurve ist so wie wir in den vorhergehenden Kapiteln darauf geachtet haben, dass der erste Knick ein Talknick ist.

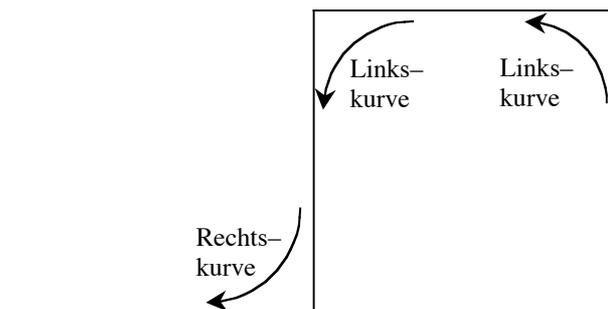


Abb. 4.4: Die Knicke als Links- bzw. Rechtskurve

**Die Papierfaltungs-
polygone**

Für die formale Betrachtung geben wir eine exakte Definition der Papierfaltungs-
polygone an.

Definition 4.1

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von Polygonen, die folgendermaßen in einem ebenen
Koordinatensystem definiert sind:

- a. Die erste Polygonkante beginnt im Ursprung und verläuft entlang der positiven y-
Achse.
- b. Das Polygon R_n besteht aus 2^n Kanten der Länge $(\frac{1}{2})^n$.
- c. Zwischen den Kanten k und $k+1$, $1 \leq k \leq 2^n - 1$ ist ein Winkel von $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$, wenn in
dem Wort w_n an der Stelle k ein $\begin{cases} \text{L} \\ \text{R} \end{cases}$ steht.

Beispiel:

$w_3 = \text{LLRLLRR}$

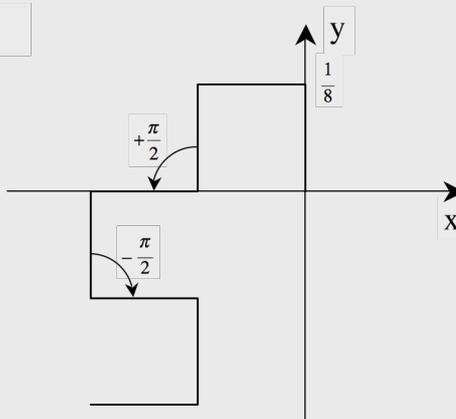


Abb. 4.5: Das Polygon R_3 wird nach dem Wort w_3 gebildet.

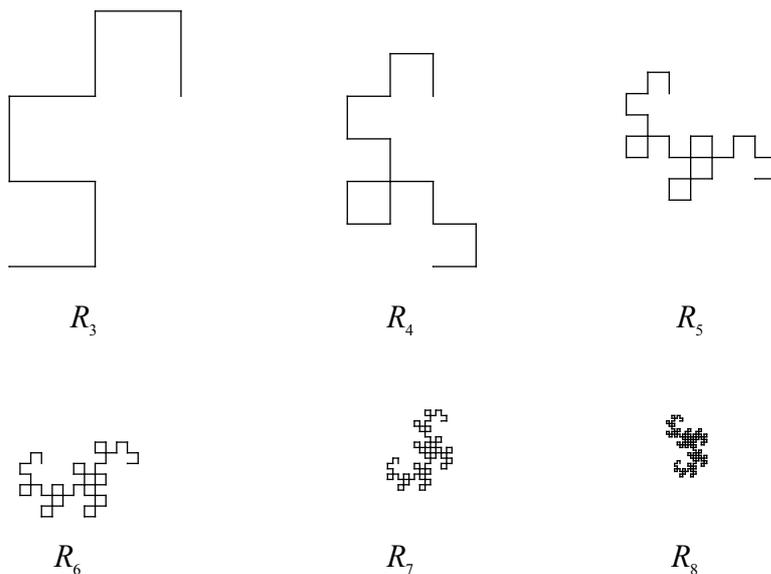


Abb. 4.6: Die Polygone R_3 bis R_8

Die Polygone R_n sind genau nach dem Papierfaltungsvorgang gebildet, wobei der Papierstreifen so aufgefaltet wird, dass die einzelnen Abschnitte rechte Winkel bilden und der erste Streifenabschnitt nach oben, der zweite nach links zeigt. Insbesondere ist die Gesamtlänge des Polygons konstant, da sie der Länge des Papierstreifens entspricht. Die Folge der Polygone $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ hat als Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ einen Punkt.

Diese Aussage ist keine große Überraschung, denn das war schon eine Erfahrung mit den Papierstreifen. Auch die Abb. 4.3 und 4.6 legen dieses nahe, denn die Kurvenzüge „werden immer kleiner“.

Die geometrische Interpretation des Inflationsvorganges

Wir wollen diese Aussagen dadurch begründen, dass wir eine neue Folge Q_n von Polygonen einführen, die gegenüber den Polygonen R_n vergrößert sind. Die Konstruktion der neuen Polygone orientiert sich am Inflationsgesetz. Abwechselnd werden vor, zwischen und am Schluss eines Wortes „L“ und „R“ geschrieben. Die Begründung für diese Inflation haben wir in den Papierstreifen gefunden, die alle mit einem weiteren Knick versehen wurden. Diesem Knicken eines Streifenabschnittes entspricht im Polygon der Vorgang, dass auf eine Kante ein Dreieck aufgesetzt wird, so dass aus einer Kante zwei gebildet werden.

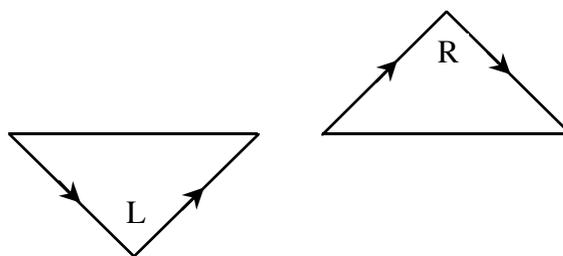


Abb. 4.7: Auf eine Kante wird ein Links- oder Rechtsknicke aufgesetzt.

Für die weiteren Betrachtungen ist besonders wichtig, dass die neuen Kanten in den Endpunkten der alten Kante beginnen bzw. enden. Diesen Vorgang wollen wir nun beispielhaft auf das Polygon R_3 anwenden. Auf jede Kante wird entsprechend Abb. 4.7 abwechselnd ein Links- und ein Rechtsknicke gesetzt, beginnend mit einem Linksknicke.

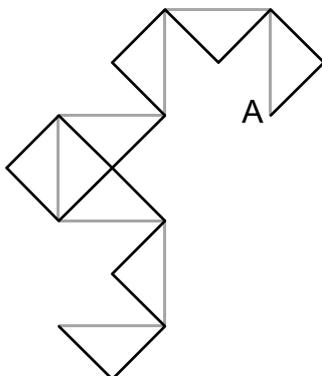


Abb. 4.8: Die Kanten (grau) des Polygons der 3. Stufe werden durch neue Kanten (schwarz) ersetzt.

Bestehende Knicke bleiben erhalten

Tatsächlich ist der neue Linienzug ein Polygon zur 4. Stufe. Wir wollen uns kurz überzeugen, dass die Kurven des vorhergehenden Polygons korrekt, d.h. in derselben Orientierung in das Polygon der nächsten Stufe übernommen werden.

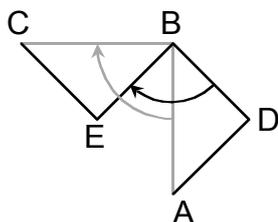


Abb. 4.9: Die Dreiecke hängen über eine Drehung zusammen

Über der Kante \overline{AB} werden die Kanten \overline{AD} und \overline{DB} gezeichnet, über der Kante \overline{BC} die Kanten \overline{BE} und \overline{EC} . Dann bildet die Drehung um B mit -90° das Dreieck ADB auf das Dreieck CEB ab. Somit ist der Winkel zwischen entsprechenden Kanten gleich groß und in der gleichen Orientierung. Also bleibt der Linksknick zwischen den Kanten \overline{AB} und \overline{BC} erhalten als Linksknick zwischen den Kanten \overline{DB} und \overline{BE} . Durch die hier vorgestellte Konstruktion bleiben also die vorhandenen Knicke erhalten und es werden wechselseitig neue Knicke eingefügt, so dass der Inflationsprozess in den Knickfolgen tatsächlich geometrisch nachgebildet wird.

Schaut man jedoch genau hin, so erkennt man, dass das entstandene Polygon nicht das Polygon R_4 ist, also das zu R_3 gehörige Polygon der 4. Stufe. Beim Papierfalten werden die Kanten von Stufe zu Stufe halbiert, und die Gesamtfigur „wird kleiner“, während die Länge der Polygone gleich ist, es ist ja die Länge des Papierstreifens. Bei der geometrischen Konstruktion zum Inflationsgesetz sind die neuen Kanten aber nicht die Hälfte der vorhergehenden, sondern länger. Dadurch wird das Polygon von Schritt zu Schritt länger und der Vergrößerungsfaktor ist so gewählt, dass zumindest die Entfernung von Anfangs zu Endpunkt gleich groß bleibt.

Grenze zwischen unendlich schrumpfen oder wachsen

Die passende Größe zu finden ist ein kritischer Prozess, da er iteriert wird. Wird die Entfernung vom Anfangs- zum Endpunkt verkleinert, so geschieht das fortgesetzt und beide Punkte sind im Grenzwert identisch. So passiert es beim realen Papierfalten. Wird jedoch der Abstand vergrößert, so wächst die Figur im fortgesetzten Prozess über alle Grenzen. Die passende Größe zu finden und somit die kritische Grenze zwischen Schrumpfen und Wachsen einzuhalten, erinnert an Phasenübergänge, wie sie in der Physik in verschiedensten Phänomenen vorkommen. Die nachfolgenden Untersuchungen dienen einer genauen zahlenmäßigen Erfassung dieses Prozesses. Dann haben wir auch genauere Möglichkeiten, diesen Phasenübergang näher zu analysieren.

Der Vergrößerungsfaktor

Insbesondere um die letzten Aussagen über die Größe präzisieren zu können, werden wir die Polygone, die nach dem geometrischen Inflationsgesetz gebildet werden, definieren und untersuchen.

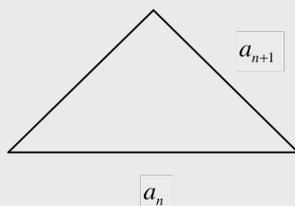


Abb. 4.10: Die Berechnung der neuen Kantenlänge

Ist auf einer Stufe n die Länge einer Kante a_n , so ist die Länge der Kante auf der nachfolgenden Stufe $n+1$ nach dem geometrischen Inflationsvorgang:

$$a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = a_n^2 \text{ also } a_{n+1}^2 = \frac{1}{2} a_n^2 \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} a_n$$

Folglich wird die Kante von Stufe zu Stufe nur um den Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzt und nicht mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ wie beim Papierfalten.

Wir haben damit den exakten Skalierungsfaktor für die Kantenlänge von Stufe zu Stufe gefunden. Wir wollen nun analog zur Definition 4.1 neue Polygone definieren, die von Stufe zu Stufe einige konstante geometrische Eigenschaften haben. Zum einen soll die Entfernung vom Anfangs- zum Endpunkt konstant bleiben. Betrachtet man die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt in den Abbildungen 4.3 und 4.6, so erkennt man, dass sie von Stufe zu Stufen um 45° gegen den Uhrzeigersinn rotiert. Dieses werden wir in den neuen Polygonen ausgleichen, so dass dann Anfangs- und Endpunkt für die Polygone auf allen Stufen konstant bleiben. Wir legen den Anfang in den Ursprung und den Endpunkt auf $(1;0)$

Die Polygone zum Inflationsprozess

Definition 4.2

$(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von Polygonen, die folgendermaßen in einem ebenen Koordinatensystem definiert sind:

- a. Die erste Polygonkante von Q_n beginnt im Ursprung und schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel von $-n \cdot \frac{\pi}{4}$ ein.
- b. Das Polygon Q_n besteht aus 2^n Kanten der Länge $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$.
- c. Zwischen den Kanten k und $k+1$, $1 \leq k \leq 2^n - 1$ ist ein Winkel von $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$, wenn in dem Wort w_n an der Stelle k ein $\begin{cases} L \\ R \end{cases}$ steht.

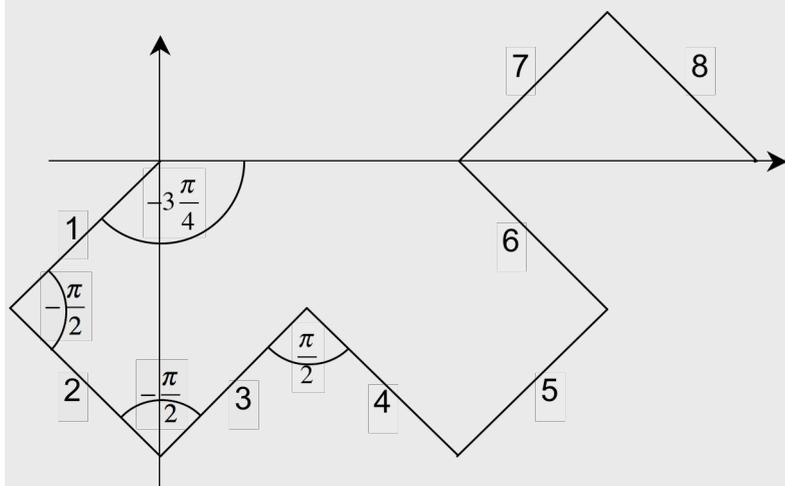


Abb. 4. 11: Das Polygon Q_3

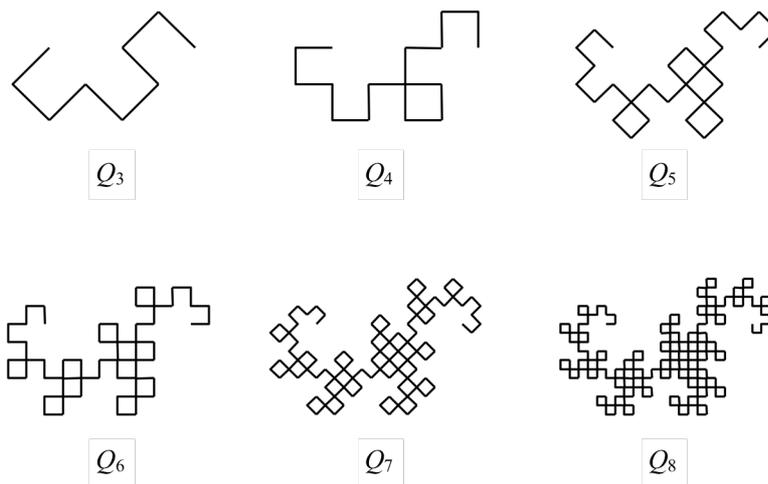


Abb. 4.12: Die Polygone Q_3 bis Q_8

Definition 4.3

Bezeichnung der Eckpunkte

Bezeichnung der Ecken in den Polygonen Q_n
 Der k -te Punkt im Polygon Q_n wird mit $P_{n,k}$ bezeichnet, $k = 0, \dots, 2^n$, wobei der Anfangspunkt (der Ursprung) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $P_{n,0}$ bezeichnet wird.

Die Definition der Polygone Q_n geschieht analog zur Definition der Papierfaltungspolygone R_n in Definition 4.1. Die Beschreibung von Q_n ist unabhängig von Q_{n-1} , so dass nicht notwendigerweise klar ist, ob die Eckpunkte eines Polygons Q_{n-1} mit jedem zweiten Eckpunkt des Polygons Q_n übereinstimmen, dass also die Konstruktion wirklich durch den oben beschriebenen geometrischen Inflationsvorgang geschieht. Dieses wird im nachfolgenden Satz formuliert und bewiesen.

Satz 4.1

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k, 1 \leq k \leq 2^n$ gilt: $P_{n+1,2k} = P_{n,k}$

Beweis

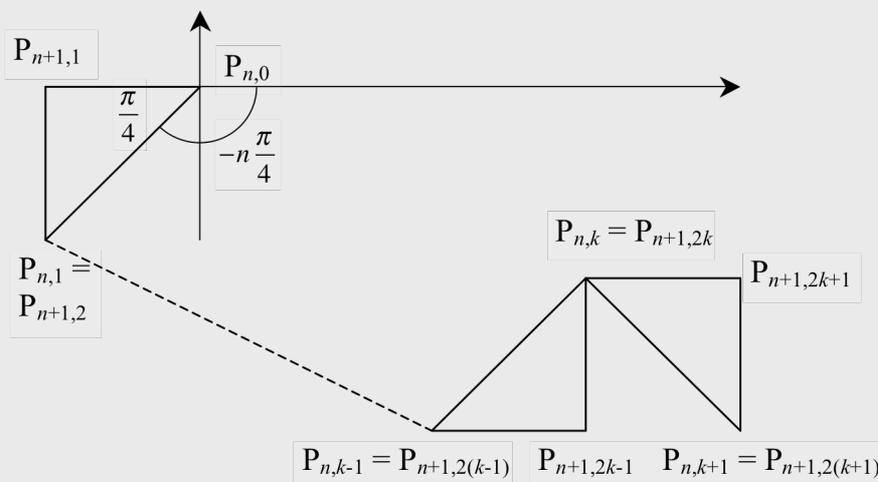


Abb. 4.13: Benennung der Eckpunkte

Fall 1: $k = 1$
 Nach der Definition 4.2 schließt die erste Kante von Q_n mit der positiven x-Achse einen Winkel von $-n \frac{\pi}{4}$ ein und die erste Kante von Q_{n+1} einen Winkel von $-(n+1) \frac{\pi}{4}$. Folglich ist im Dreieck $P_{n,0}P_{n+1,1}P_{n,1}$ der Winkel bei $P_{n,0}$ $\frac{\pi}{4}$. Das Dreieck ist nach Definition 4.2 gleichschenkelig. Da die Kanten im Polygon Q_n um den Faktor $\sqrt{2}$ länger sind als die Kanten von Q_{n+1} , ist der Endpunkt $P_{n,1}$ der ersten Kante des Polygons Q_n gleich dem Endpunkt $P_{n+1,2}$ der zweiten Kante des Polygons Q_{n+1} .

Fall 2: $1 < k < 2^n$
 Fall 2a: Im Wort w_{n+1} steht an der Stelle $2k-1$ ein „L“. Das heißt, dass im Punkt $P_{n+1,2k-1}$ die Kanten einen Winkel von $-\frac{\pi}{2}$ bilden. Dann steht im Wort w_{n+1} an der Stelle $2k+1$ ein „R“ und die Kanten bilden im Punkt $P_{n+1,2k+1}$ einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$. Nach Satz 2.2 a) und Satz 3.1 ist im Wort w_{n+1} das Symbol am Platz $2k$ das gleiche wie im Wort w_n das Symbol am Platz k . Diese Voraussetzungen stellen sicher, dass durch Drehung um $\pm \frac{\pi}{2}$ um den Punkt $P_{n,k}$ die Kante $\overline{P_{n,k-1}P_{n,k}}$ auf $\overline{P_{n,k}P_{n,k+1}}$, die Kante $\overline{P_{n+1,2k-1}P_{n+1,2k}}$ auf $\overline{P_{n+1,2k}P_{n+1,2k+1}}$ und die Kante $\overline{P_{n+1,2(k-1)}P_{n+1,2k-1}}$ auf $\overline{P_{n+1,2k+1}P_{n+1,2(k+1)}}$ abgebildet wird. Damit folgt aus $P_{n+1,2(k-1)} = P_{n,k-1}$ auch $P_{n+1,2(k+1)} = P_{n,k+1}$.

Fall 2b: Im Wort w_{n+1} steht an der Stelle $2k-1$ ein „R“. Das heißt, dass im Punkt $P_{n+1,2k-1}$ die Kanten einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ bilden. Dann steht im Wort w_{n+1} an der Stelle $2k+1$ ein „L“ und alle weiteren Argumentationen laufen analog zum Fall 2a.

Folgerung:
 Die Polygone Q_n enden alle im Punkt $P_{n,2^n} = (0;1)$, da Q_0 laut Definition im Punkt $P_{0,1} = (0;1)$ endet.

Die Größe der Polygone

Die mathematischen Betrachtungen präzisieren, was man darunter versteht, dass die Polygone, die durch die geometrische Inflation entstehen, gleich groß bleiben. Denn alle 2^n+1 Eckpunkte eines Polygons Q_n sind auch Eckpunkte aller nachfolgenden Polygone Q_k , $k > n$. Wie können wir aber genauer belegen, dass die Papierfaltungspolygone R_n immer kleiner werden und schließlich auf einen Punkt schrumpfen? Und zwar mit einer genaueren Begründung, also nicht nur „durch Hinsehen“, wie es die Abb. 4.6 andeutet. Vergleichen wir zunächst die beiden Polygone, indem wir sie maßstabsgerecht gemäß den Definitionen 4.1 und 4.2 darstellen. (Siehe Abb. 4.14) Dabei ist das Polygon Q_n gegenüber dem Polygon R_n um den Faktor $(\sqrt{2})^n$ gestreckt, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

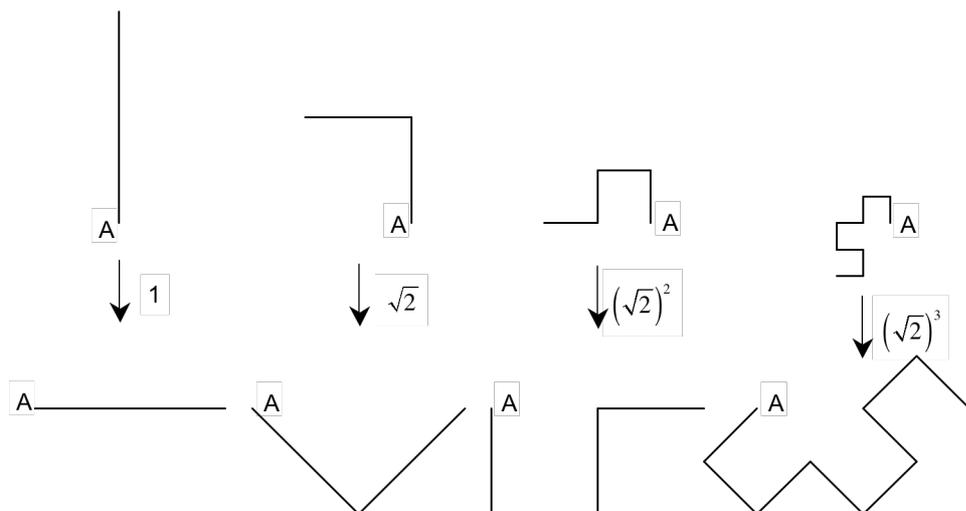


Abb. 4.14: Vergleich der Polygone R_0 bis R_3 (obere Reihe) mit den Polygone Q_0 bis Q_3 (untere Reihe)

Da für die Polygone Q_n die Entfernungen des Anfangspunktes A zum Endpunkt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gleich bleibt, und die Polygone Q_n gegenüber den Polygone R_n um den Faktor $(\sqrt{2})^n$ gestreckt sind, müssen bei den Polygone R_n Anfangs- und Endpunkt immer dichter zusammen liegen. Genauer betrachtet ist diese Entfernung im Polygon $R_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, was im Grenzwert schließlich Null wird. Anfangs- und Endpunkt sind dann gleich. Dieses Zusammenrücken der beiden Enden des Polygons beweist aber noch nicht, dass die Polygone R_n auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

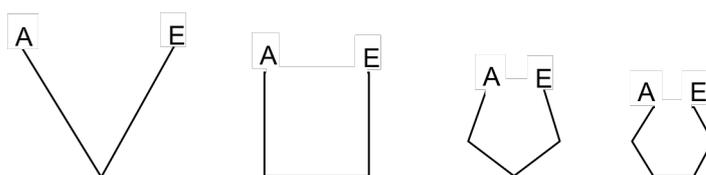


Abb. 4.15: Hier rückten Anfang- und Endpunkt immer dichter zusammen

Wir biegen eine Linie zu einem regelmäßigen Dreieck, Viereck, Fünfeck, u.s.w., lassen aber immer eine Seite offen. Der Polygonzug von A nach E soll dabei immer die gleiche Länge haben. Hier kommen auch Anfangs- und Endpunkt immer dichter zusammen, die Figur als Ganzes schrumpft aber nicht auf einen Punkt zusammen, sondern formt sich zu einem geschlossenen Kreis mit Radius größer Null.

Eine Abschätzung für die Polygone Q_n Für einen stichhaltigen Beweis schätzen wir die Größe der Polygone Q_n durch eine Folge von Kreisen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ab. K_0 ist der Kreis um den Punkt $(0,5;0)$ mit dem Radius 0,5. Dieser Kreis enthält Q_0 und auch Q_1 . Für das Polygon Q_2 könnten wir nun ebenfalls einen Kreis mit minimalem Radius angeben, der Q_2 ganz enthält. Diese Berechnungen würden aber immer komplizierter werden. Deshalb berechnen wir die

Kreisradien für die Folge der Kreise nach einem einfachen Prinzip, das einerseits zwar sicherstellt, dass das Polygon Q_n immer im Kreis K_n liegt, das aber andererseits die Kreise größer werden lässt als eine minimale Umfassung. Es handelt sich also um eine geometrische Abschätzung der Polygone nach oben.

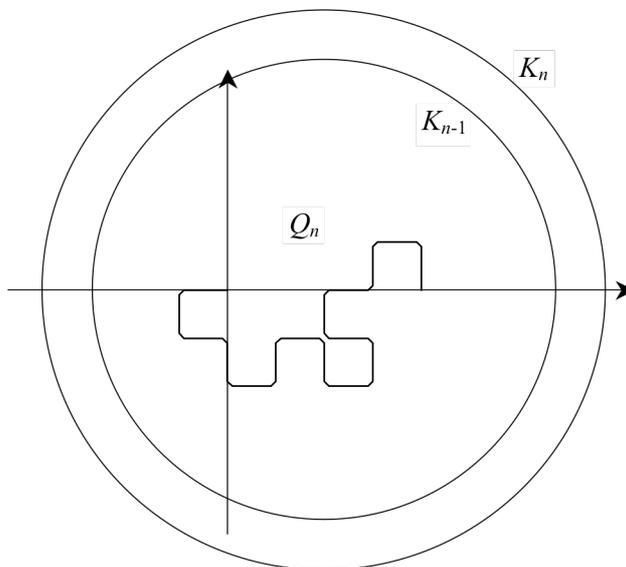


Abb. 4.16: Abschätzung des Polygons Q_n durch den Kreis K_n , dessen Radius um die Kantenlänge des Polygons Q_n größer ist als der Radius von K_{n-1}

Die Punkte des Polygons Q_{n-1} sind auch Eckpunkte des Polygons Q_n und die neuen Punkte werden nach der geometrischen Interpretation des Inflationgesetzes zwischen die vorhandenen Punkte gesetzt. Da die Kantenlänge des Polygons $Q_n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ ist, muss das Polygon Q_n in einem Kreis mit dem Radius $r_n = r_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ liegen, wenn der Kreis K_{n-1} um $(0,5;0)$ mit dem Radius r_{n-1} das Polygon Q_{n-1} vollständig umschlossen hat.

Betrachten wir die ersten Schritte dieses Verfahrens:

Stufe n	Radius des Kreises K_n
0	$r_0 = \frac{1}{2}$
1	$r_1 = r_0 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
2	$r_2 = r_1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$
3	$r_3 = r_2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3$

Aus diesen Beispielen ist unmittelbar ersichtlich, dass allgemein gilt:

$$r_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^k = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^k = -\frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Der Radius der Kreise wird also über eine geometrische Reihe berechnet, deren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ existiert. Dieser Grenzradius r , der den Kreis um den Mittelpunkt $(0,5;0)$ bestimmt, der alle Polygone $Q_n, n \in \mathbb{N}_0$ umschließt, ist:

$$r = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx 2,914$$

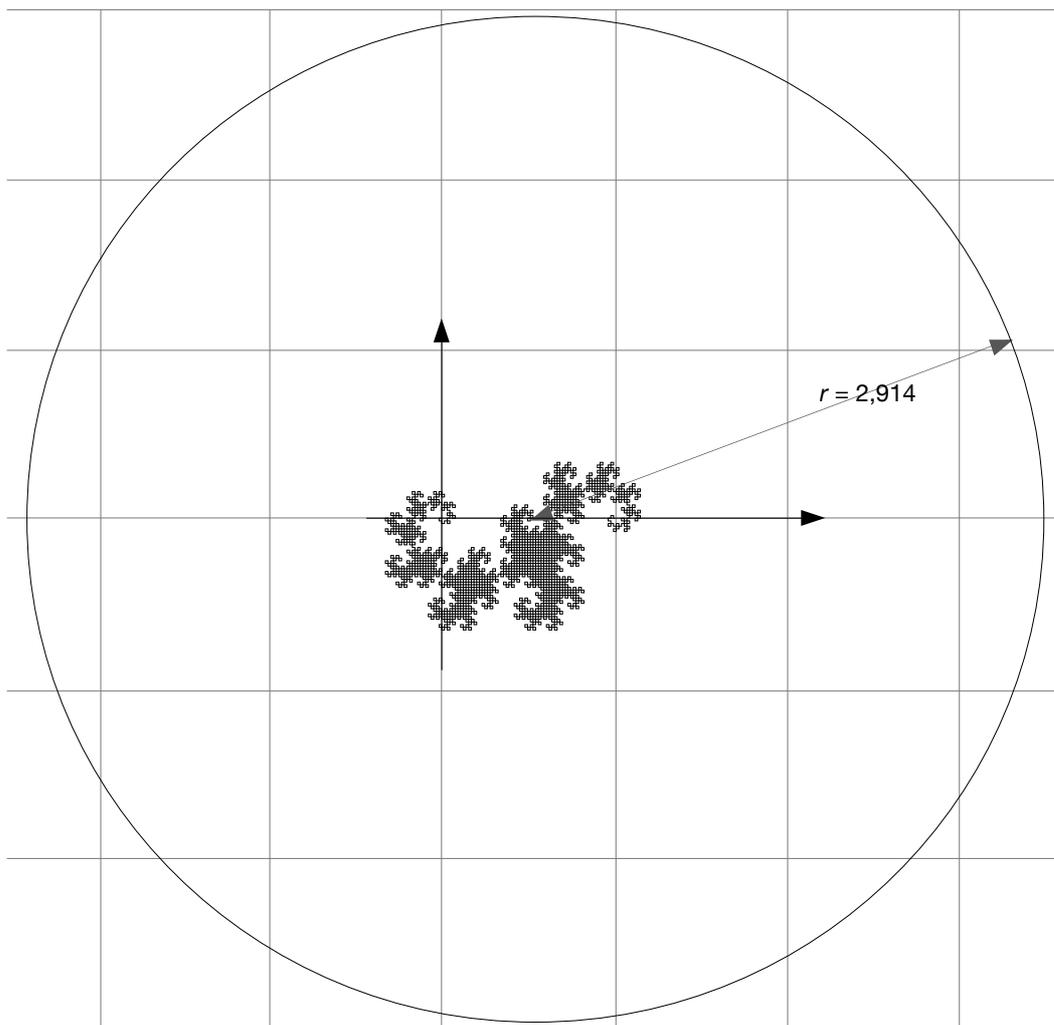


Abb. 4.17: Q_{12} und der berechnete Grenzkreis, der alle Polygone $Q_n, n \in \mathbb{N}_0$ umschließt. Das Gitter hat eine Weite von 1.

Wir haben damit gezeigt, dass die Polygone $Q_n, n \in \mathbb{N}_0$ durch einen Kreis mit endlichem Radius nach oben abgeschätzt werden können, was beweist, dass sie eine endliche Größe behalten. Damit können wir aber auch beweisen, dass die Polygone $R_n, n \in \mathbb{N}_0$, die zum eigentlichen Papierfaltungsprozess gehören, gegen einen Punkt konvergieren müssen.

**Die Papierfaltungs-
polygone schrumpfen auf
einen Punkt**

Wie wir oben schon gesehen haben, sind für eine Stufe n die Polygone R_n und Q_n ähnlich, wobei R_n gegenüber dem Polygon Q_n um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ gestaucht ist.

Wenn nun das Polygon Q_n durch einen Kreis mit dem Radius $r_n = -\frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$

nach oben abgeschätzt werden kann, so kann das Polygon R_n durch einen Kreis mit

dem Radius $s_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n = r_n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ nach oben abgeschätzt

werden. Für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ strebt r_n gegen einen endlichen Wert, während der Faktor $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ gegen 0 strebt, mithin also auch die Radien s_n . Damit müssen die Polygone R_n gegen einen Punkt konvergieren.

Nach der Definition der Wörter $w_n, n \in \mathbb{N}_0$ haben wir im Kapitel 2 (Definition 2.5) die Papierfaltungsfolge ω als Grenzwert der Wörter w_n definiert. Dieses war möglich, da die Wörter w_n das vorhergehende Wort w_{n-1} vollständig übernommen haben. Die Frage, ob auch die Polygone Q_n einen Grenzwert besitzen, ist schwerer zu beantworten. Dazu müssen wir zunächst den Grenzwert definieren und dann beweisen, dass er der Grenzwert der Polygonfolge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist.

Der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$

Die Polygone Q_n werden durch die Eckpunkte $P_{n,k}$ und ihre Verbindungslinien definiert. Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ verschwinden aber die Verbindungslinien, da ihre Länge gegen Null konvergiert.

Definition 4.4

Die Menge aller Eckpunkte des Polygons $Q_n, n \in \mathbb{N}_0$ wird mit Q_n' bezeichnet.

In Definition 4.3 hatten wir die Punkte des Polygons Q_n mit $P_{n,k}, k = 0, 1, \dots, 2^n$ bezeichnet. Also können wir auch schreiben: $Q_n' = \{P_{n,k} \mid k = 0, 1, 2, \dots, 2^n\}$. Für den Grenzwert dieser Punktfolgen definieren wir nun die Menge aller Grenzwerte von Punktfolgen, deren Folgeelemente Elemente aus den Q_n' sind. Diese Menge umfasst alle Q_n' , enthält aber noch weitere Punkte, die keine Eckpunkte eines Polygons sind. Diese Menge nennt man die abgeschlossene Hülle oder kurz den Abschluss.

Definition 4.5

Der Abschluss der Vereinigung aller Eckpunktfolgen wird mit Q bezeichnet.

$$Q = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k'}$$

Satz 4.2

Die Menge Q ist der Grenzwert für die Polygonfolge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis

Für den Beweis müssen wir zeigen, dass in jeder ε -Umgebung von Q fast alle Polygone Q_n liegen. Wir müssen also zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ die Q_n in der ε -Umgebung von Q liegen.

Sei $U_{n,k}(\varepsilon) = \{X \mid X \text{ Punkt der Ebene und } d(X, P_{n,k}) < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung um den Punkt $P_{n,k}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{N+2} + \dots = \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^N \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} < \varepsilon.$$

Die Kantenlänge im Polygon Q_N ist $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^N$. Nach der oben dargestellten Abschätzung liegen alle weiteren Polygonabschnitte zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten $P_{N,k}$ und $P_{N,k+1}$ von Q_N innerhalb des Kreises um den Mittelpunkt jeder Kante

von Q_N und dem Radius $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^N \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)$. Damit liegen diese Polygon-

abschnitte auch in der ε -Umgebung des Kantenmittelpunktes. Die Kantenmittelpunkte sind aber Elemente von Q_{N+2} .

Damit liegen alle Polygone Q_n $n \geq N$ in der ε -Umgebung von Q_{N+2} und damit der ε -Umgebung von Q .

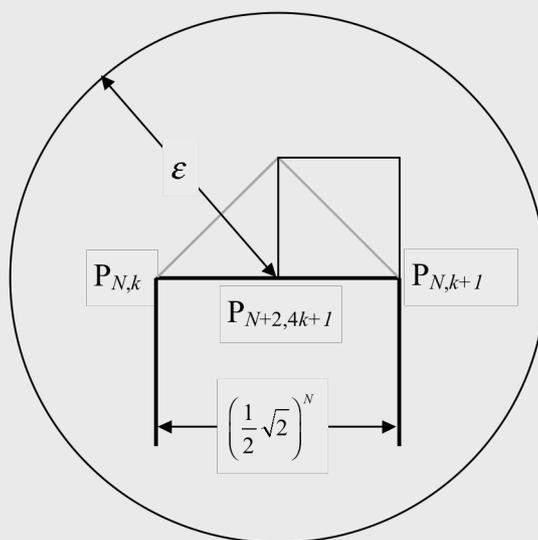


Abb. 4.18: Die ε -Umgebung um den Mittelpunkt der Kante $P_{N,k}P_{N,k+1}$

Die grafische Darstellung der unendlichen Punktmenge Q ist nicht möglich. Wie so oft genügt auch hier ein Folgenglied mit genügend hohem Index, um den Grenzwert genau genug zu veranschaulichen.

Der Highway-Dragon

Die Polygone Q_n besitzen als Grenzwert eine Figur, die wegen des „ausgefransten“ Randes zu den Fraktalen gezählt wird. Es wird nach seinem Entdecker auch „Heighway-Dragon“ genannt.

Diese Verwandlung des Grenzprozesses von dem langweiligen „schrumpft auf einen Punkt“ zu dem hochinteressanten Fall „hat ein Fraktal als Grenzwert“ liegt in der

Vergrößerung der Polygone Q_n gegenüber den Papierfaltungspolygonen R_n um den Faktor $(\sqrt{2})^n$

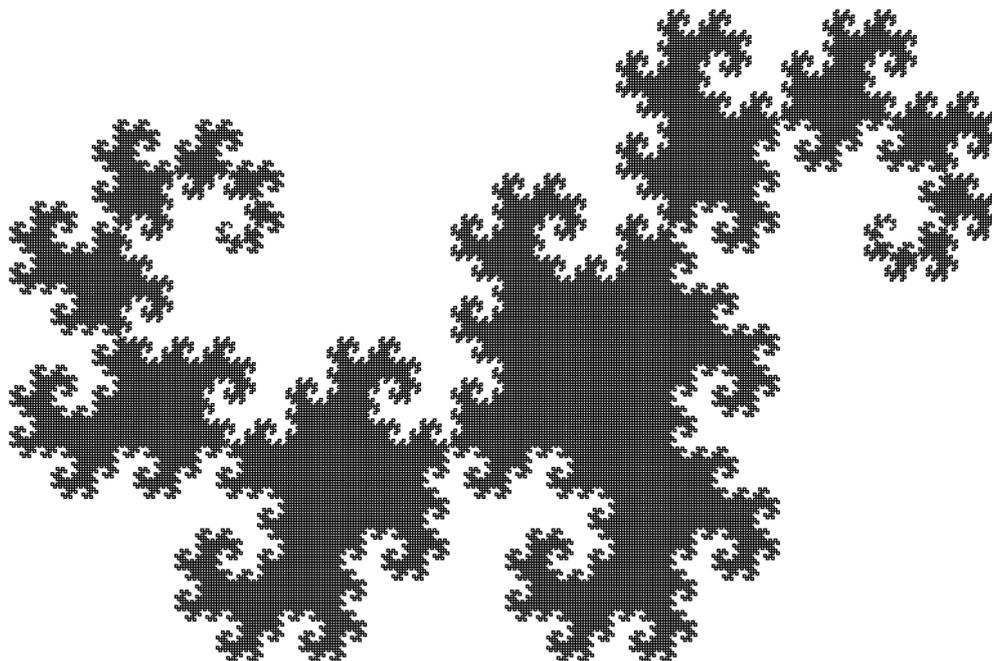


Abb. 4.19: Q_{16} als Annäherung an die Grenzfigur Q

Da der Vergrößerungsfaktor $\sqrt{2}$ also etwas Besonderes produziert, erhebt sich die Frage, wie das Grenzverhalten für andere Vergrößerungsfaktoren aussieht.

Für die Papierfaltungspolygone R_n hatten wir als Radius für den umschließenden Kreis $s_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n = r_n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ gefunden. Der Vergrößerungsfaktor $(\sqrt{2})^n$, der den Übergang von den Papierfaltungspolygonen R_n zu den Polygonen Q_n skaliert, geht in der umgekehrten Richtung über den Kehrwert $\frac{1}{(\sqrt{2})^n} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ in die Radien der abschätzenden Kreise ein (siehe Abb. 4.20).

Der Vergrößerungsfaktor $\sqrt{2}$ ist etwas Besonderes Wir nehmen nun an, dass wir neue Polygone $S_n, n \in \mathbb{N}_0$ definieren, die zu den Polygonen R_n ähnlich sind, aber gegenüber diesen um den Faktor $q \in \mathbb{R}^+$ skaliert sind. Dann können diese Polygone S_n wiederum durch Kreise abgeschätzt werden, deren Radien t_n gegenüber den Radien s_n mit q^n skaliert sind. Kurz: $t_n = s_n \cdot q^n$. Für den Fall $q = \sqrt{2}$ gehen die Polygone S_n über in die Polygone Q_n , die ein Fraktal als Grenzwert haben. Wir wollen nun zeigen, dass der Skalierungsfaktor $q = \sqrt{2}$ etwas Besonderes ist und eine Grenze darstellt zwischen zwei prinzipiellen Verhaltensweisen.

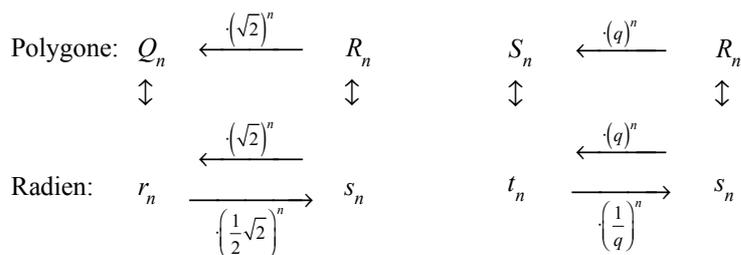


Abb. 4.20: Der Zusammenhang zwischen den Polygonen und den Radien der zugehörigen, abschätzenden Kreise

Den Grenzübergang $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ können wir einfach berechnen, wenn wir die Radien t_n auf die Radien r_n der Polygone Q_n beziehen, denn diese besitzen einen Grenzwert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \left(\frac{1}{2} \sqrt{2}\right)^n \cdot q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Wie wir oben gezeigt haben, ist der Grenzwert der Radien r_n $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, so dass der Grenzwert der Radien t_n nur vom Ausdruck $\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n$ bestimmt wird.

Der Faktor $\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n$ strebt genau dann gegen Null, wenn $0 < q < \sqrt{2}$ ist. Dann ist der Grenzwert der Radien t_n der umschließenden Kreise Null, und damit schrumpfen die Figuren, die ganz in diesen Kreisen liegen, auf einen Punkt.

Wählt man nun $q > \sqrt{2}$, so wachsen die Radien t_n über alle Grenzen. Die Kreise waren aber nur eine Abschätzung der Polygone S_n nach oben und wenn wir feststellen, dass die Kreise unendlich groß werden, muss das noch nicht für die Polygone S_n selbst gelten.

Betrachten wir noch einmal die Konstruktion zum Inflationsgesetz:

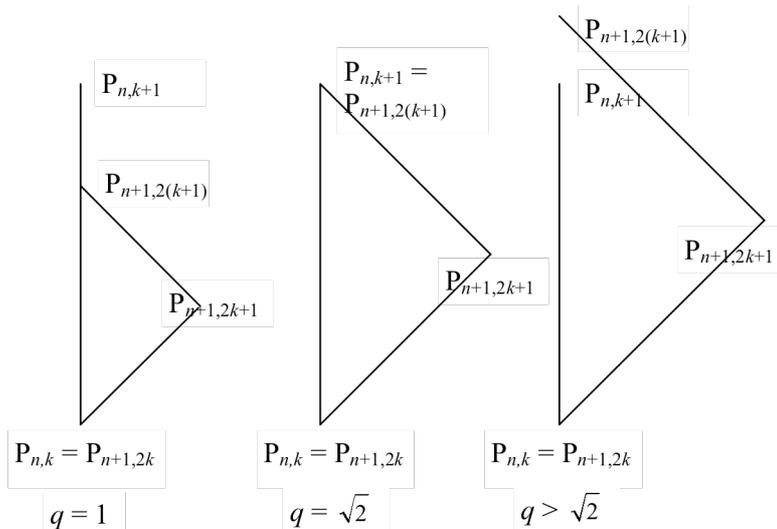


Abb. 4.21: Für $q = 1$ haben wir die Papierfaltungspolygone R_n , für $q = \sqrt{2}$ die Polygone Q_n und für $q > \sqrt{2}$ erhalten wir Polygone, die immer größer werden.

In der Mitte der Abb. 4.21 sehen wir die Konstruktion der Polygone Q_n , links diejenige für das originale Papierfalten, bei dem jede Kante des nachfolgenden Polygons halb so lang ist wie die vorhergehende. Dabei wird die Entfernung $|P_{n+1,2k} P_{n+1,2(k+1)}|$ kleiner als die Entfernung $|P_{n,k} P_{n,k+1}|$, was zur Folge hat, dass der Anfangs- und der Endpunkt der Figuren von Iterationsschritt zu Iterationsschritt kleiner wird und die der Grenzwert der Polygone R_n letztlich ein Punkt ist. Ist nun $q > \sqrt{2}$, so wird $|P_{n+1,2k} P_{n+1,2(k+1)}|$ größer als $|P_{n,k} P_{n,k+1}|$, womit in jedem Polygon S_n die Entfernung vom Anfangspunkt $P_{n,0}$ zum Endpunkt $P_{n,2^n}$ um denselben Faktor wächst. Daraus folgt, dass im Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ dieser Abstand über alle Grenzen wächst und somit die Grenzfigur selbst auch.

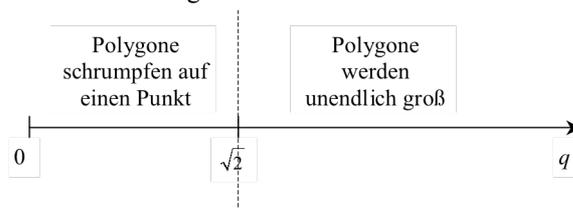


Abb. 4.22: Übersicht über den Skalierungsfaktor q

Wir sehen, dass der Skalierungsfaktor $q = \sqrt{2}$ eine Besonderheit darstellt. Nur für diesen Fall besitzt der Iterationsprozess eine interessante Grenzfigur. Ist q kleiner, schrumpfen die Figuren auf einen Punkt, ist q größer, wachsen sie über alle Grenzen.

Wie Davis und Knuth in [P03], Theorem 4, zeigen, ist die fraktale Grenzkurve (der Highway-Dragon, Abb. 4.19) eine flächenfüllende Kurve.

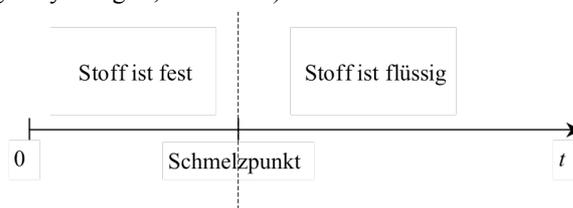


Abb. 4.23: Der Phasenübergang am Schmelzpunkt

Analogie zum Phasenübergang...

Dieses erinnert stark an physikalische Situationen, in denen sich in Abhängigkeit einer physikalischen Größe ein Zustand abrupt ändert. So geht Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur bei 0°C vom festen in den flüssigen Zustand über oder ein ferromagnetischer Stoff verliert bei einer speziellen Temperatur, der Curie-Temperatur, seine magnetische Eigenschaft. Solche Veränderungen nennt man Phasenübergänge. Dabei kommt der Grenze selbst allerdings keine spezielle Eigenschaft zu.

... und astronomischen Vorgängen

Dafür, dass der Grenze selbst eine eigene Qualität zukommt, findet man in der Astronomie Beispiele. Wird ein neuer Komet entdeckt, so gibt es für sein Verhalten in Sonnennähe zwei prinzipielle Möglichkeiten: seine Energie liegt unter einer Grenze, so dass er auf einer (möglicherweise lang gestreckten) elliptischen Bahn um die Sonne fliegt. Das bedeutet, dass er nach einer gewissen Zeit wieder sichtbar werden wird. Oder seine Energie ist über der Grenze, so dass er sich auf einer hyperbelförmigen Bahn bewegt und daher das Sonnensystem wieder für immer verlassen wird. Hat der Komet exakt die Grenzenergie (was in der Praxis sehr unwahrscheinlich ist), so bewegt er sich auf einer parabelförmigen Bahn. Da zu Beginn einer Neuentdeckung die Daten nicht ausreichen, zwischen den beiden wahrscheinlichen Fällen zu unterscheiden, berechnen die Astronomen die ersten Vorhersagen genau mit der Grenzsituation, der

parabelförmigen Bahn, bis weitere Beobachtungen, insbesondere Abweichungen von der Parabelbahn, eine Entscheidung zulassen.

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

1. Unterrichtsvorschlag (zur Konstruktion der Polygone Q_n)

angesprochene schulmathematische Themen

Satz des Pythagoras

Benötigte Materialien

Geodreieck, Zirkel

Ziel des Unterrichts

Die Schülerinnen und Schüler sollen die geometrische Inflation für verschiedene Stufen konstruieren und den dabei verwendeten Vergrößerungsfaktor berechnen.

Ablauf

Man gibt den Schülerinnen und Schülern Bilder mit dem Polygon Q_3 und erläutert ihnen, wie abwechselnd Dreiecke auf die vorhandenen Kanten gezeichnet werden soll. Das neu entstandene Polygon soll analysiert und als Q_4 erkannt werden. In der Regel möchten die Schülerinnen und Schüler dieses Ergebnis sofort ein weiteres Mal überprüfen, so dass man eine Zeichnung von Q_4 zur Hand haben sollte.

Bei der Besprechung sind drei Eigenschaften herauszuarbeiten

- Durch die Dreieckskonstruktion werden abwechselnd Links- und Rechtsknicke eingefügt. (siehe Abb. 4.8)
- Die vorhandenen Knicke werden unverändert in die neue Konstruktion übernommen. (siehe Abb. 4.9)
- Die so konstruierten Polygone unterscheiden sich in der Größe von den Polygonen, die durch den Papierfaltungsprozess entstehen. Der neue Verkürzungsfaktor ist zu berechnen (siehe Abb. 4.10) und der Skalierungsfaktor zwischen den beiden Polygonen Q_n und R_n auf der entsprechenden Iterationsstufe. (siehe Abb. 4.14)

2. Unterrichtsvorschlag (zur Größe geometrischer Figuren)

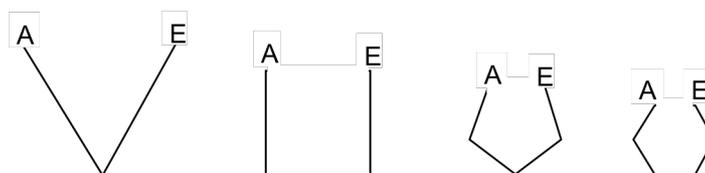


Abb. 4.15 von Seite 61

angesprochene schulmathematische Themen

reguläre Vielecke, Kreisberechnung

Benötigte Materialien

Geodreieck, Zirkel (Geometriesoftware)

Ziel des Unterrichts

Die Schülerinnen und Schüler sollen die konkreten Rechnungen zur Abbildung 4.15 durchführen .

Ablauf

Die Schüler sollen die regulären Vielecke so berechnen, dass die Polygonzüge von A nach E die gleiche Länge haben. Zusätzlich soll jeweils die Länge der offenen Kante \overline{AE} bestimmt werden und der Radius des Umkreises des Polygons.

Diese Betrachtung ist dann besonders lohnend, wenn bereits das Archimedische Verfahren zur Berechnung der Zahl π durchgeführt wurde, da hier dieses Verfahren letztlich umgekehrt wird.

Normiert man die Länge des Polygonzuges von A nach E zu 1, erhält man für die Radien folgende Lösungen:

Eckenzahl	Radius des offenen Polygons
3	$r_3 = \frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 0,2887$
4	$r_4 = \frac{1}{6}\sqrt{2} \approx 0,2357$
5	$r_5 = \frac{1}{80}(5 + \sqrt{5})\sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \approx 0,2127$
6	$r_6 = \frac{1}{5} = 0,2000$
im Grenzwert	$r = \frac{1}{2\pi} \approx 0,1592$

3. Unterrichtsvorschlag (zur Abschätzung der Polygone durch Kreise)

Normalerweise kommt der Begriff der Abschätzung in der Schule nicht vor. Hier hat man die seltene Gelegenheit, das Thema sehr anschaulich behandeln zu können. In einer grafischen Darstellung kann man immer die eigentliche Größe (das Polygon Q_n) und die Abschätzung (der Kreis um Q_n) vergleichen. Weiterhin kann man deutlich machen, dass auch eine recht grobe Abschätzung sinnvoll ist.

angesprochene schulmathematische Themen

Abschätzung, geometrische Reihe

Benötigte Materialien

Geodreieck, Zirkel, Farbstifte, (Taschenrechner)

Ziel des Unterrichts

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Idee einer Abschätzung erfahren und konstruktiv durchführen.

Ablauf

Die Schülerinnen und Schüler zeichnen schrittweise die Polygone $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ und die zugehörigen Kreise für die Abschätzung.

Tipps zur Durchführung

Jedes Polygon und der zugehörige Kreis sollen in einer eigenen Farbe gezeichnet werden. So ist die Zuordnung deutlicher und man kann mehrere Figuren in eine Zeichnung zeichnen. Arbeitet man auf dem üblichen Karopapier, sind die Polygone leicht zu zeichnen.

Das Koordinatensystem sollte stets von -0,25 bis 1,25 auf der x-Achse und von -0,75 bis 0,25 auf der y-Achse gezeichnet werden. Für die Einteilung der Koordinatenachsen bieten sich mehrere Möglichkeiten:

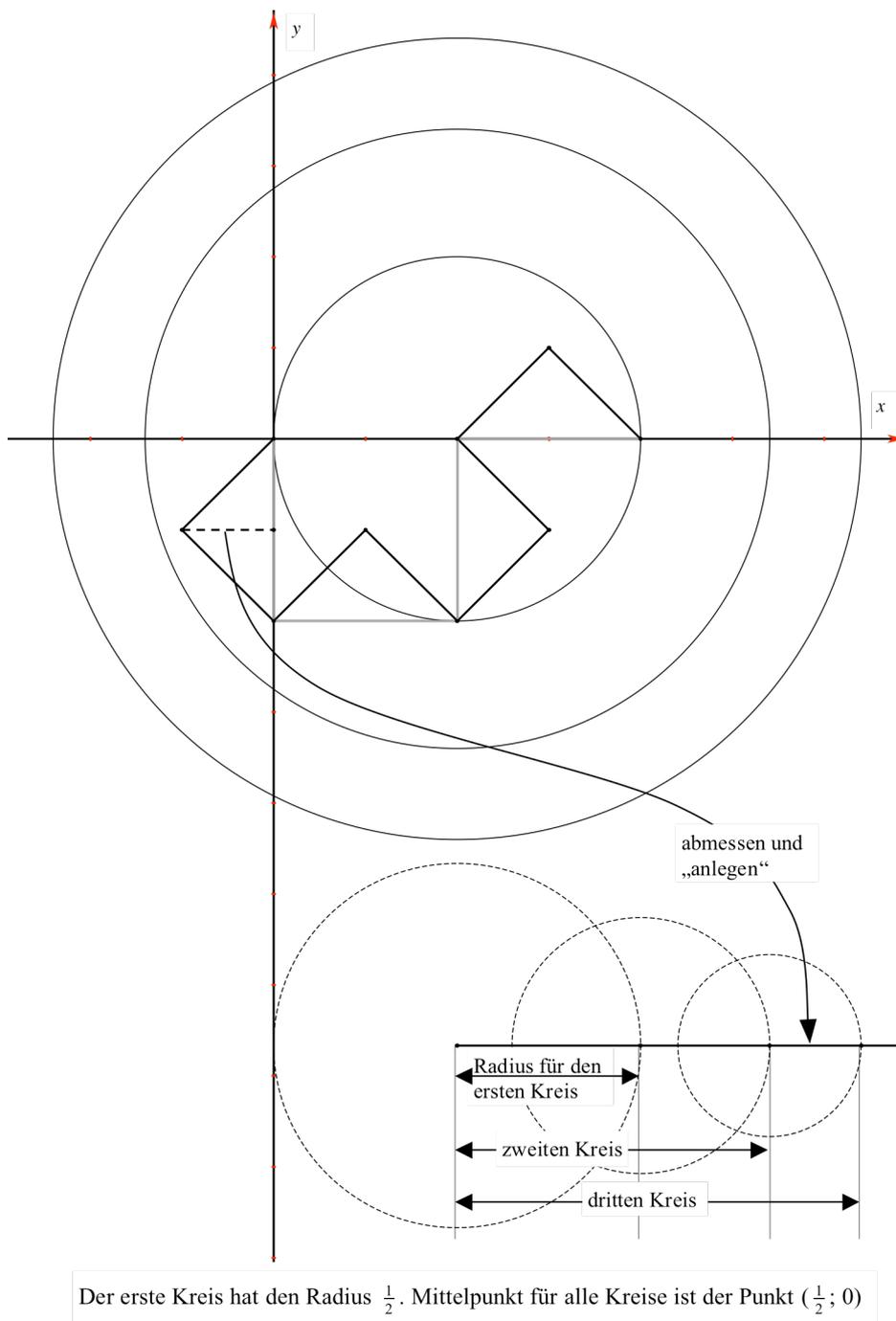


Abb. 4.24: Eine Zeichnung mit Q_2 und Q_3 und der Bestimmung der zugehörigen Kreisradien r_2 und r_3 durch Übertragen der entsprechenden Strecken

Einheit = 4 cm Dann kann man auf ein DIN A4 - Blatt drei Zeichnungen machen, in denen man unterschiedliche Polygone zusammenfasst. Das 0., 1. und 2. in der ersten Zeichnung, das 2., 3. und 4. in der zweiten und das 4., 5. und 6. Stufe in der dritten Zeichnung. Die größten Kreise in den einzelnen Zeichnungen haben die Radien 3,42 cm, 5,13 cm und 6,00 cm. Der Beginn einer neuen Zeichnung sollte immer darin bestehen, dass man das zuletzt gezeichnete Polygon zunächst abzeichnet und dann die folgenden beiden zeichnet.

Einheit = 6 cm Hier kann man zwei Zeichnungen auf ein DIN 4 - Blatt anordnen. Die Zeichnungen sind zwar etwas größer als für eine Einheit = 4 cm, trotzdem kann man mit einfacher Orientierung an den Kästchen nur bis zum 5. Polygon kommen. Gruppieren Sie 0., 1., 2. und 3. in eine Zeichnung und 3., 4. und 5. in die zweite. Die maximalen Radien sind 6,63 cm und 8,44 cm, bei guter Anordnung überlappen sich die Kreise der beiden Zeichnungen nur sehr wenig.

Einheit = 8 cm Dann kann man nur eine Zeichnung zentral auf einem DIN A4 - Blatt unterbringen, und schon der Kreis zum 5. Polygon passt nicht mehr vollständig auf das Papier. Allerdings erhält man hier große, übersichtliche Figuren und kann bei einfacher Orientierung am Kästchenmuster bis Q_8 gelangen (eine Fleißaufgabe mit 256 Kanten). Man sollte aber nie mehr als 4 Stufen in einer Zeichnung unterbringen, das wird auch bei Verwendung von Farben zu unübersichtlich. Der größte Kreis (8. Stufe) hat einen Radius von 12,8 cm.