

3 Das Inflationsgesetz

Das Reflexionsgesetz ergab sich im Wesentlichen aus der Codierung der gefalteten Papierstreifen in eine LR-Folge. Dabei ergab die übersichtliche Notierung der LR-Folgen, dass die erste Hälfte einer LR-Folge immer die Wiederholung der vorhergehenden war. Das konnten wir auch durch den Faltprozess begründen. Unsere Suche nach dem Bildungsgesetz für die zweite Hälfte war erfolgreich, als wir den fertig gefalteten Streifen noch einmal zusammengefaltet haben. Wir haben also das fertige Produkt analysiert.

Nun wollen wir den Prozess des Faltens näher untersuchen. Er liefert uns ein weiteres Gesetz, das die Bildung der LR-Ketten beschreibt, jedoch auf eine ganz andere Weise. Es ist eigentlich verwunderlich, dass die beiden verschiedenen Bildungsprozesse für die LR-Folgen dasselbe Ergebnis liefern.

Markieren der „alten“ Knicke

Wir nehmen einen Streifen, markieren das linke Ende und falten ihn zwei Mal. Dann ziehen wir den Streifen auseinander und markieren alle vorhandenen Knicke mit einem Kreuz. Das sind die „alten“ Knicke.

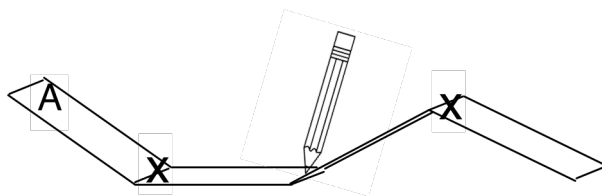


Abb. 3.1: Die „alten“ Knicke werden markiert

Nun falten wir den Streifen wieder so weit zusammen, wie er bereits gefaltet war und führen einen weiteren Faltschritt aus, wieder rechts über links. Die so neu entstehenden Knicke können wir nun am auseinander gezogenen Streifen leicht erkennen, denn sie sind nicht mit einem Kreuz markiert.

Was sehen wir? Vor dem ersten, alten Knick liegt ein neuer, ein Linksknick, dann liegt immer ein neuer Knick zwischen den alten und ganz am Schluss ist noch ein neuer Knick, ein Rechtsknick. Und wenn wir die Art der Knicke analysieren, bemerken wir, dass die neuen Knicke immer abwechselnd Links- und Rechtsknicke sind.

Analyse des Faltens

Diese verblüffende Regelmäßigkeit findet eine logische, leicht nachvollziehbare Erklärung. Wenn wir einen Papierstreifen schon mehrmals geknickt haben, liegen alle Streifenabschnitte übereinander, links und rechts befinden sich die bereits ausgeführten Knicke bzw. Anfang und Ende.

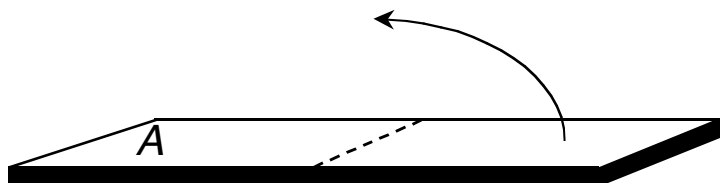


Abb. 3.2: Ein Streifenpaket wird ein weiteres Mal gefaltet

Den nächsten Knick denken wir uns nur als Winkel ausgeführt, alle bisher geraden Streifenteile erhalten nun wie mit einem Prägestempel einen Knick. Für eine Analyse

richten wir das Streifenpaket wieder so aus, dass dieser Knick ein Linksknick ist. Nun es scheint so, als wenn alle diese Knicke Linksknicke wären.

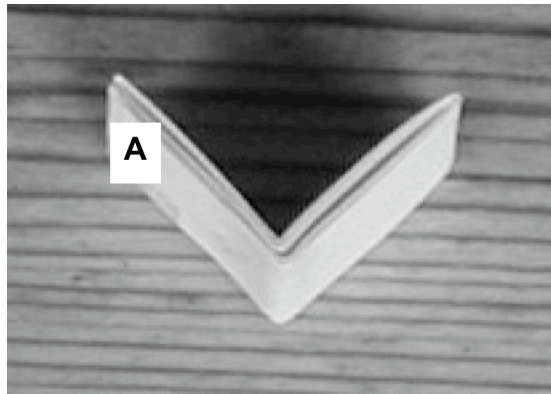


Abb. 3.3: Ein Streifenpaket ist ein weiteres Mal gefaltet

Aber machen wir uns an eine genaue Analyse der Knickfolge. Wir starten bei der Anfangsmarke und stoßen als erstes auf einen neuen Knick, einen Linksknick.

Dann treffen wir an der rechten Seite des Paketes auf einen alten Knick, als 180°-Kehre geformt. Falten wir diese Kehre auf, erhalten wir einen weiteren Linksknick. Das halbe Streifenpaket wird nach rechts gedreht und dabei werden aus den ursprünglichen Links- Rechtsknicke.

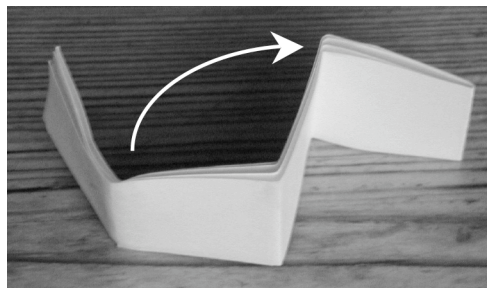


Abb. 3.4: Das halbe Streifenpaket wird herausgeklappt

Analyse ohne Aufzufalten

Wir können aber auch auf diesen und weitere Auffaltvorgänge verzichten und uns klar machen, dass wir immer dann einen Linksknick behalten, wenn wir von links nach rechts durch den Knick laufen und einen Rechtsknick erhalten, wenn wir von rechts nach links durch den Knick laufen.

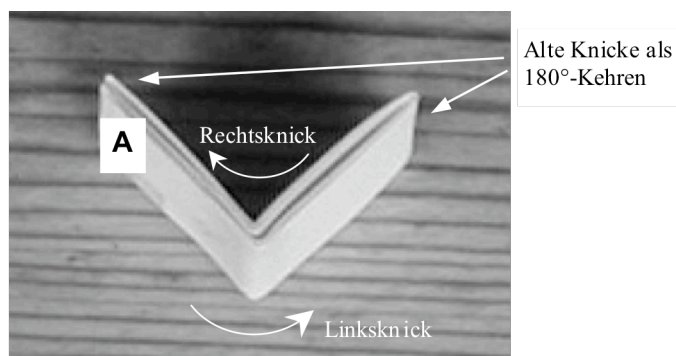


Abb. 3.5: Auch im zusammengefalteten Zustand kann man die Knicke analysieren

Läuft man also in dem zusammengefalteten Streifenpaket an dem Papierstreifen entlang, trifft man auf folgende Knicke: Anfang, neuer Knick (Linksknick), alter Knick (180°-Kehre), neuer Knick (Rechtsknick), alter Knick (180°-Kehre), neuer Knick (Linksknick) u.s.w.. Die neuen Knicke werden also zwischen die alten Knicke eingefügt, und es sind immer abwechselnd Links- und Rechtskurven.

Schauen wir uns das am Beispiel der LR-Folge zur 3. Stufe an. Um die Einfügung zu erkennen, schauen wir uns einen Papierstreifen an, der drei Mal gefaltet worden ist.

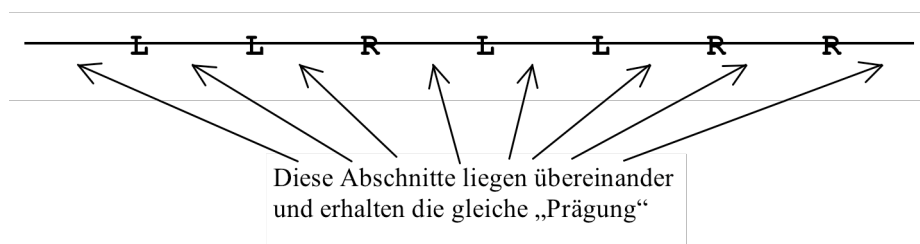


Abb. 3.6: Das Einfügen neuer Knicke

Beim Weiterfalten liegen alle Abschnitte übereinander und werden gemeinsam gefaltet. Der erste Teil erhält einen Linksknick, danach geht es mit Rechts- und Linksknick abwechselnd weiter. Das Ergebnis ist die LR-Folge der 4. Stufe, wie wir sie mit dem Reflexionsgesetz erhalten haben.

Inflation Diesen Vorgang, bei dem wechselweise neue Rechts- und Linksknicke eingefügt werden, nennen wir Inflationsprozess oder kurz Inflation.

Wieder haben wir eine Gesetzmäßigkeit induktiv gewonnen. Aus der Betrachtung des Faltungsvorganges ergibt sich der Inflationsprozess. Dabei wundert es uns nicht, dass sich beim fortgesetzten Reflexionsprozess die gleichen Knickfolgen ergeben wie beim fortgesetzten Inflationsprozess. Der experimentelle Nachweis ist ja ganz offensichtlich, denn schließlich haben wir das gleiche Experiment ausgeführt. Lediglich der Betrachtungswinkel ist beim Inflationsprozess ein anderer als beim Reflexionsprozess.

Die formal mathematische Herangehensweise ist wieder einmal anders als die induktive Erkenntnisgewinnung mit den Papierstreifen. Analog zum Reflexionsprozess in Kapitel 2 definieren wir zum Inflationsprozess einen entsprechenden Operator.

Definition 3.1

Der Inflationsoperator

Es sei $A = \{L, R\}$ ein Alphabet mit nur zwei Symbolen.

Der Operator $J : A^* \rightarrow A^*$ heißt Inflationsoperator und erzeugt aus einem Wort $w = S_1 S_2 S_3 \dots S_n$ ein Wort aus A^* nach der Vorschrift

$$J(w) = \begin{cases} L & \text{falls } w = \emptyset \\ LS_1RS_2LS_3R\dots T_nS_nT_{n+1} & \text{falls } w \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\text{mit } T_n = \begin{cases} L & \text{für } n \text{ ungerade} \\ R & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad T_{n+1} = \begin{cases} R & \text{für } n \text{ ungerade} \\ L & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Mit Hilfe des Inflationsoperators J wird nun auf dieselbe Art wie mit dem Reflexionsoperator F ein Folge von Wörtern gebildet.

Eine neue Folge von Wörtern**Definition 3.2**

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von Wörtern aus $\{L, R\}^*$, die folgendermaßen rekursiv definiert ist: $v_1 = L$, $v_{n+1} = J(v_n)$

Hält man sich vor Augen, wie der Reflexionsoperator F wirkt und wie ganz anders der Inflationsoperator J , so ist es eigentlich verwunderlich, dass beide wiederholt angewendeten Operatoren die gleiche Folge von Wörtern erzeugen. Dieses wird im nachfolgenden Theorem formuliert und bewiesen.

Die Äquivalenz von Reflexions- und Inflationsprozess**Theorem 3.1**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $v_n = w_n$.

Beweis (vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $v_1 = L = w_1$

Induktionsvoraussetzung: $v_k = w_k$ für alle $k \leq n$

Induktionsbehauptung: $v_{n+1} = w_{n+1}$

Induktionsbeweis:

Nach der Definition 3.2 der Wörter v_n gilt:

$$v_{n+1} = LS_1RS_2L \dots LS_{2^{n-1}-1}R \text{ mit } S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1} = v_n$$

Nach der Definition 2.3 der Wörter w_n gilt:

$$w_{n+1} = w_n L \bar{w}_n = v_n L \bar{v}_n \text{ nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$= LS_1RS_2L \dots LS_{2^{n-1}-1}RLS_1RS_2L \dots LS_{2^{n-1}-1}R$$

mit $S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1} = v_{n-1}$ nach der Definition 3.2 der Wörter v_n

Auflösen des hinteren, durchgehenden Querstriches ergibt

$$= LS_1RS_2L \dots LS_{2^{n-1}-1}RLLS_{2^{n-1}-1}R \dots RS_2LS_1R$$

Das besagt, dass auf dem 1., 3., ..., $2^{n+1} - 1$ -ten Platz abwechseln „L“ und „R“ stehen, was den ersten Teil der Definition von v_{n+1} ausmacht.

Die dazwischen stehenden Symbole sind $S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1}LS_{2^{n-1}-1} \dots S_2S_1$. Der hintere Teil aus gequerten Symbolen kann zu einem gequerten Wort zusammengefasst werden

$$S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1}LS_{2^{n-1}-1} \dots S_2S_1 = S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1}LS_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1}$$

Wegen $S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1} = v_{n-1}$

gilt $S_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1}LS_1S_2 \dots S_{2^{n-1}-1} = v_{n-1}Lv_{n-1} = w_{n-1}Lw_{n-1}$, letzteres nach der Induktionsvoraussetzung. Mit $w_{n-1}Lw_{n-1} = w_n = v_n$ ist gezeigt, dass die Symbole zwischen den abwechselnden „L“ und „R“ gerade das Wort v_n bilden, was den zweiten Teil der Definition von v_{n+1} ausmacht.

Damit ist insgesamt gezeigt, dass $v_{n+1} = w_{n+1}$ gilt.

Berechnung des Symbols an einem beliebigen Platz

Den Inflationsprozess können wir, wie den Reflexionsprozess, verwenden, um wieder einen Algorithmus zu finden, mit dem wir bestimmen können, ob am Platz mit der Nummer k ein „L“ oder ein „R“ steht. Aus dem Inflationsprozess folgt, dass an den ungeraden Plätzen eines Papierfaltungswortes immer abwechselnd ein „L“ oder „R“ steht.

L L R L L R R L L L R R L R R L L L R..
01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19..

Das besagt aber sofort, dass am 1., 5., 9., ..., $4b+1$ -ten Platz ($b \in \mathbb{N}$) immer ein „L“ steht und am 3., 7., 11., ..., $4b+3$ -ten Platz immer ein „R“. D.h., dass wir für ungerade Platznummern bereits einen Algorithmus gefunden haben:

Gesetzmäßigkeit für ungerade Platznummern

Lässt die ungerade Platznummer k beim Teilen durch 4 den Rest 1, so steht an diesem Platz ein „L“, ist der Rest 3, so steht dort ein „R“.

Oder etwas formaler:

Zerlege die ungerade Platznummer k in $k = 4b + c$, mit $c \in \{1, 3\}$.

Ist $c = 1$, so steht am Platz k ein „L“,

ist $c = 3$, so steht am Platz k ein „R“.

Beispiel: Auf dem Platz 107 steht ein „R“, da $107 = 4 \cdot 26 + 3$.

Gesetzmäßigkeit für gerade Platznummern

Es kommt natürlich sofort die Frage auf, ob man nicht auch eine entsprechende Regel für die geraden Plätze aufstellen kann. Die Antwort lautet genau genommen nein, aber man kann über die Symbole an den geraden Plätze etwas aussagen, indem man letztlich die Regel über die ungeraden Plätze anwendet.

Betrachten wir zunächst als Beispiel das Wort w_4 .

L	L	R	L	L	R	R	L	L	L	R	R	L	R	R
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
			01		02		03		04		05		06	07

Abb. 3.7: Streichen der ungeraden und neues Nummerieren der verbliebenen geraden Plätze

Streichen wir alle ungeraden Symbole, so verbleibt nach der Umkehrung des Inflationsgesetzes auf den geraden Plätzen die Symbole des Wortes w_3 . Nummerieren wir die verbleibenden Symbole neu durch, so ist die neue Platznummer gerade die Hälfte der alten Platznummer. Da die Symbole aber die eines Papierfaltungswortes sind, können wir auf die ungeraden Plätze die bereits erkannte Regel anwenden. Die verbleibenden geraden Plätze werden erneut durchnummeriert, was letztlich das Halbieren der Platznummer bedeutet.

Das führt zum Algorithmus für die geraden Platznummern:

Teile die Platznummer so lange durch 2, bis eine ungerade Nummer entsteht. Wende auf diese die Regel für die ungeraden Plätze an.

Oder etwas formaler:

Zerlege die Platznummer k in $k = 2^a(4b + c)$, mit $c \in \{1, 3\}$.

Ist $c = 1$, so steht am Platz k ein „L“,

ist $c = 3$, so steht am Platz k ein „R“.

Beispiel: $92 = 2^2 \cdot 23 = 2^2 \cdot (4 \cdot 5 + 3)$, also steht auf Platz 92 ein „R“.

Die Eigenschaften, die diesem Algorithmus zu Grunde liegen, können wir mit Hilfe der Funktion $\tilde{\sigma}$ formulieren und beweisen.

Satz 3.1

a) Für alle Wörter w_n gilt:

$$\tilde{\sigma}(w_n, 1) = L, \quad \tilde{\sigma}(w_n, 3) = R$$

$$\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_n, k + 4) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}, k \text{ ungerade}, 1 \leq k < 2^n - 5$$

b) Für alle Wörter w_n gilt:

$$\tilde{\sigma}(w_n, g) = \tilde{\sigma}\left(w_n, \frac{g}{2}\right) \text{ für } g \in \mathbb{N}, g \text{ gerade, } g < 2^n - 1$$

Beweis

Zu a) Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition des Inflationsoperators.

Zu b) $\tilde{\sigma}(w_n, g) = \tilde{\sigma}\left(w_{n-1}, \frac{g}{2}\right)$ folgt unmittelbar aus dem Inflationsprozess, denn streicht man im Wort w_n alle Symbole auf ungeraden Plätzen, erhält man das Wort w_{n-1} und die Symbole stehen auf Platznummern, die gegenüber der alten Platznummer halbiert sind. Nach Satz 2.2 a) gilt $\tilde{\sigma}\left(w_{n-1}, \frac{g}{2}\right) = \tilde{\sigma}\left(w_n, \frac{g}{2}\right)$.

Das Inflationsgesetz für die Papierfaltungsfolge

Diese für die endlichen Wörter w_n gefundenen Eigenschaften lassen sich direkt auf die Papierfaltungsfolge ω übertragen.

Satz 3.2

a) $\sigma(1) = L$, $\sigma(3) = R$

Für alle $k \in \mathbb{N}$, k ungerade, gilt: $\sigma(k) = \sigma(k + 4)$

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$, k gerade, gilt: $\sigma(k) = \sigma\left(\frac{k}{2}\right)$

Beweis

Die Beweise folgen direkt aus Satz 3.1 und der Definition der Papierfaltungsfolge ω (Definition 2.5).

Diese Eigenschaften definieren die Papierfaltungsfolge ω eindeutig.

Das wollen wir beispielhaft an den ersten 8 Symbolen zeigen.

$\sigma(1) = L$ nach Satz 3.2 a)

$\sigma(2) = \sigma(1) = L$ nach Satz 3.2 b), a)

$\sigma(3) = R$ nach Satz 3.2 a)

$\sigma(4) = \sigma(2) = \sigma(1) = L$ nach Satz 3.2 b), a)

$\sigma(5) = \sigma(1) = L$ nach Satz 3.2 a)

$\sigma(6) = \sigma(3) = R$ nach Satz 3.2 b), a)

$\sigma(7) = \sigma(3) = R$ nach Satz 3.2 a)

$\sigma(8) = \sigma(4) = \sigma(2) = \sigma(1) = L$ nach Satz 3.2 b), a)

Neue Erkenntnis durch Kombination von Mustern

Wir wollen nun die Suche nach weiteren Mustern im Umfeld dessen, was wir bisher erkannt haben, dadurch fortsetzen, dass wir Muster miteinander kombinieren. Der Inflationsoperator, den wir in Definition 3.1 für endliche Wörter eingeführt haben, können wir sinnvoll auf unendlich lange Wörter erweitern⁵. Das geschieht natürlich in der Absicht, ihn letztlich auf die unendliche Papierfaltungsfolge anzuwenden.

⁵ Das ist für den Reflexionsoperator F (Definition 2.2) nicht möglich, da dort hinter dem gegebenen Wort weitere Zeichen eingefügt werden.

Der Inflationsoperator auf unendlich langen Wörtern**Definition 3.3**

Es sei $A = \{L, R\}$ ein Alphabet mit nur zwei Symbolen und $w = S_1 S_2 S_3 S_4 \dots$ ein unendlich langes Wort aus A^* .

Dann erzeugt J aus w ein unendlich langes Wort nach der Vorschrift

$$J(w) = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \dots \text{ mit } T_k = \begin{cases} S_{\frac{k}{2}} & \text{für } k = 2i, i \in \mathbb{N} \\ L & \text{für } k = 4i + 1, i \in \mathbb{N} \\ R & \text{für } k = 4i + 3, i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

oder etwas anschaulicher $J(w) = L S_1 R S_2 L S_3 R S_4 L \dots$

Wenden wir nun den Inflationsoperator auf die Papierfaltungsfolge ω an, so stellen wir bei den ersten Symbolen fest, dass ω gegenüber dem Inflationsoperator J offenbar invariant ist.

$$\omega = \mathbf{L L R L L R R L L L R R L R R L L L R R R L L R R L R R} \dots$$

$$J(\omega) = \mathbf{L L R L L R R L L L R R L R R L L L R R R L L R R L R R} \dots$$

Es gilt vermutlich $J(\omega) = \omega$, was wir im nachfolgenden Satz beweisen wollen. Oder mit anderen Worten: ω ist bezüglich des Inflationsoperators J ein Fixpunkt. Dabei gilt der Zusammenhang „Wenn das Wort die Papierfaltungsfolge ω ist, dann ist das Bild bezüglich des Inflationsoperators J gleich der Papierfaltungsfolge ω “ nicht nur in dieser Richtung, sondern auch umgekehrt: „Wenn für ein Wort das Bild bezüglich des Inflationsoperators J gleich dem Wort selbst ist, dann ist das Wort die Papierfaltungsfolge ω “. Diese Fixpunkteigenschaft ist also charakteristisch für ω .

Diese eben beschriebene Eigenschaft der Papierfaltungsfolge ω schreiben wir formal in Satz 3.3 auf und beweisen sie.

Die Papierfaltungsfolge als Fixpunkt des Inflationsoperators**Satz 3.3**

Sei $w \in \{L, R\}^*$. Dann gilt $w = \omega \Leftrightarrow J(w) = w$. Die beiden oben formulierten Eigenschaften münden hier in eine logische Äquivalenz.

Beweis

" $\Rightarrow$ "

Zu zeigen ist, dass für jede Platznummer $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sigma(k) = \tilde{\sigma}(\omega, k) = \tilde{\sigma}(J(\omega), k)$.

Das teilen wir auf in die beiden Eigenschaften des Satzes 3.2

Die Anwendung des Inflationsoperators J bewirkt, dass in $J(\omega)$ auf den Plätzen 1, 5, 9, ... ein „L“ steht und auf den Plätzen 3, 7, 11, ... ein „R“. Folglich gilt für ungerade k $\sigma(k) = \tilde{\sigma}(\omega, k) = \tilde{\sigma}(J(\omega), k)$

Die Anwendung des Inflationsoperators J bewirkt, dass jedes Symbol auf dem Platz $2k = g$ in $J(\omega)$ mit jedem Symbol auf dem Platz $\frac{g}{2}$ in ω übereinstimmt. Also

$\sigma(\frac{g}{2}) = \tilde{\sigma}(\omega, \frac{g}{2}) = \tilde{\sigma}(J(\omega), g)$. Nach Satz 3.2 b) gilt $\sigma(\frac{g}{2}) = \sigma(g) = \tilde{\sigma}(\omega, g)$ also gilt auch für gerade Platznummern $\sigma(k) = \tilde{\sigma}(\omega, k) = \tilde{\sigma}(J(\omega), k)$

" $\Leftarrow$ "

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9 \dots = L X_1 R X_2 L X_3 R X_4 L X_5 R X_6 \dots$$

Zu zeigen ist, dass das Wort w mit $J(w) = w$ in den Symbolen auf allen Plätzen mit denen von ω übereinstimmt. Dazu zeigen wir, dass w die Eigenschaften des Satzes 3.2 erfüllt.

Wegen $J(w) = w$ steht auf den Plätzen 1, 5, 9, ... also $k = 4j + 1, j \in \mathbb{N}$ ein „L“ und auf den Plätzen 3, 7, 11, ... also $k = 4j + 3, j \in \mathbb{N}$ ein „R“. Damit gilt $\tilde{\sigma}(w, 1) = L$, $\tilde{\sigma}(w, 3) = R$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, k ungerade $\tilde{\sigma}(w, k) = \tilde{\sigma}(w, k + 4)$.

Wegen $J(w) = w$ stimmt in w jedes Symbol auf einem Platz mit der Nummer k überein mit dem Symbol auf dem Platz mit der Nummer $2k$. Damit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$k \text{ gerade: } \tilde{\sigma}(w, k) = \tilde{\sigma}\left(w, \frac{k}{2}\right).$$

Mit der Aussage des Satzes 3.3 haben wir eine neue Stufe der Beschreibung der Papierfaltungsfolge erreicht. Die bisherigen Beschreibungen liefen immer darauf hinaus, die Symbole an den entsprechenden Plätzen zu beschreiben. Das geschieht letztlich auch in Satz 3.2. Dieses Vorgehen ist vergleichbar mit der Beschreibung der Zahl $\frac{1}{7}$ durch ihre periodische Dezimalzahldarstellung $0,14285714285\dots$. Wir kennen für jede Stelle die Ziffer und können sie auch einfach berechnen. Dennoch ist der Umgang mit dieser Zahl etwas umständlich. Deutlicher wird diese Umständlichkeit, wenn wir an eine Zahl wie $0,1457273846389464524232745437363485$ denken.

**Beschreibung eines
mathematischen Objekts
über eine Gleichung**

Eine weite Darstellung ist die Beschreibung der Zahl durch eine Gleichung. $x = \frac{1}{7}$ ist die Zahl, die die Gleichung $7x = 1$ erfüllt. Diese Beschreibung mündet unmittelbar in die Bruchschreibweise, die zumindest für periodische Dezimalzahlen die einfachere Darstellung ist, denn die Rechnungen mit der Zahl werden bei der Bruchdarstellung letztlich auf die Rechnungen mit natürlichen Zahlen zurückgeführt.

Noch offensichtlicher ist der Vorteil bei Wurzeln. Zu $\sqrt{2}$ gibt es eine Dezimaldarstellung, in der die Ziffern auf jedem Platz definiert und letztlich auch berechenbar sind. Nur da es keine periodische Darstellung ist und auch andere Regelmäßigkeiten fehlen, ist der Umgang mit der unendlichen Dezimalzahl nicht möglich. Die Beschreibung über eine Gleichung $x^2 = 2$ ist Erfolg versprechend, denn hierdurch wird die Brücke zu den rationalen Zahlen geschlagen und wir können symbolisch mit $\sqrt{2}$ rechnen und immer dann diese Brücke benutzen, wenn ein Term wie $(\sqrt{2})^2$ auftaucht.

In diesem Licht ist die Beschreibung der Papierfaltungsfolge durch die Gleichung $J(w) = w$ ein qualitativ anderer Schritt als das Reflexions- oder Inflationsgesetz. Der Nutzen ist für unsere Darstellung allerdings nicht so groß wie der beschriebene Nutzen bei den Zahlen, da wir nicht über einen vertrauten Bereich des Operierens mit Wörtern verfügen, auf den wir uns vorteilhafterweise zurückziehen könnten.

**Anknüpfung an ein
grundlegendes,
mathematisches Prinzip**

Wir wollen die bisher erkannten Muster mit anderen mathematischen Kenntnissen verknüpfen und so die Verbindung zu einem tief liegenden, sehr allgemeinen Prinzip herstellen. Diese nachfolgenden Betrachtungen führen uns in sehr grundlegende Bereiche der Mathematik und wir verlassen hier deutlich das Niveau, das wir üblicherweise bei unseren Betrachtungen hatten.

Dafür liefert uns diese Anknüpfung eine Antwort auf die Frage, wie man denn einen Fixpunkt allgemein finden kann. Bei unseren Betrachtungen ist er uns ja „in den Schoß gefallen“, wir hatten gar nicht gezielt danach gesucht.

Es geht um das **Banachsche Fixpunktprinzip**, ein fundamentales Prinzip der metrischen Topologie, das vor allem bei iterativen Prozessen greifen kann. Um das

Banachsche Fixpunktprinzip anwenden zu können, müssen einige mathematische Voraussetzungen erfüllt sein:

- (1) a) Wir benötigen eine Menge X von mathematischen Objekten, auf der
- b) eine Metrik definiert ist, also die „Entfernung“ zwischen zwei Objekten gemessen werden kann. Weiterhin
- c) ist die Menge X vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert gegen ein Element der Menge X .

Die Menge X nennt man dann einen vollständigen, metrischen Raum.

- (2) Eine Abbildung F der Menge auf sich, die kontrahierend ist. Das bedeutet, dass für zwei beliebige Elemente u, v aus der Menge X die „Entfernung“ der Bilder $F(u), F(v)$ kleiner ist als die „Entfernung“ der Ausgangselemente u und v .

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so besagt das Banachsche Fixpunktprinzip, dass die Abbildung F genau einen Fixpunkt a in der Menge X besitzt und man diesen ermitteln kann, indem man den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ $a_n = F(a_{n-1})$ mit beliebigem Startwert a_0 bestimmt.

Wir zeigen nun, dass die Menge der unendlichen Wörter über einem Alphabet mit dem Inflationsoperator als Abbildung die Voraussetzungen für das Banachsche Fixpunktprinzip erfüllt.

(1) Die Menge von Objekten und ihre Eigenschaften

- a) Die Menge von Objekten, die wir zu Grunde legen wollen, sind die unendlichen Wörter über einem Alphabet. Wir wollen uns hier nicht zu sehr einschränken und lassen in dem Alphabet alle Zeichen zu. Damit wir beim Inflationsoperator aber nicht zu sehr umdenken müssen, sollen zumindest die beiden Buchstaben „L“ und „R“ enthalten sein.

- b) Für eine Metrik müssen wir festlegen, was wir unter der Entfernung von zwei Zeichenketten verstehen wollen⁶.

Definition 3.4

Der Abstand zwischen zwei Wörtern

Sei A ein beliebiges Alphabet. Seien u und v zwei (unendliche) Wörter aus A^* , die in den ersten m Zeichen übereinstimmen.

Dann ist $d(u, v) = \frac{1}{2^m}$ der Abstand von u und v . Sind u und v beide endlich und gleich, so wird $d(u, v) = 0$ gesetzt.

Dieser so definierte Abstand ist eine Metrik auf A^* , denn es gelten die wesentlichen vier Eigenschaften, die eine Metrik erfüllen muss:

- i) $d(u, v) \geq 0$ für alle Wörter $u, v \in A^*$
- ii) $d(u, v) = 0$ gilt nur dann, wenn $u = v$ ist. Das ist auch für unendliche Wörter erfüllt.
- iii) $d(u, v) = d(v, u)$ für alle Wörter $u, v \in A^*$
- iv) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (Dreiecksungleichung)

Man macht beim Vergleich von u und w einen „Umweg“ über v .

Nehmen wir an, dass u und v in den ersten n_1 Zeichen übereinstimmen und v und w in den ersten n_2 Zeichen. Nennen wir konsequenter Weise die Anzahl der übereinstimmenden Zeichen am Wortanfang von u und w n_3 . Welcher Zusammenhang besteht

⁶ Das ist wieder einmal eine Fragestellung, die in die theoretische Informatik fällt und zu der es verschiedene Antworten gibt, je nach konkreter Problemstellung.

zwischen n_1, n_2 und n_3 ? u und w müssen beim direkten Vergleich mindestens so weit übereinstimmen, wie sich die übereinstimmenden Anfänge von u, v und w überlappen. Folglich ist $n_3 \geq \min(n_1, n_2)$. Damit gilt für die Abstände:

$$d(u, w) = \frac{1}{2^{n_3}} \leq \frac{1}{2^{\min(n_1, n_2)}} \leq \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}}$$
 Im Fall $u \neq v$ und $v \neq w$ ist die rechte Seite gerade $d(u, v) + d(v, w)$. Für die Sonderfälle, dass $u = v$ oder $v = w$ gilt die Dreiecksungleichung auch.

Damit ist A^* mit der in Definition 3.4 definierten Metrik ein metrischer Raum.

c) A^* ist ein vollständiger, metrischer Raum

Eine Cauchy-Folge von unendlichen Wörtern aus A^* ist eine Folge von Wörtern, die am Anfang immer ähnlicher werden. Der Grenzwert ist dann natürlich ein Wort mit Zeichen aus A , also ein Element von A^* .

Damit hat A^* genau die notwendigen Eigenschaften, die vom Banachschen Fixpunktprinzip gefordert werden.

(2) Der Operator und seine Eigenschaften

Wir müssen nun zeigen, dass der Inflationsoperator J kontrahierend ist.

Für ein beliebiges Alphabet, das zumindest die beiden Buchstaben „L“ und „R“ enthält, heißt das formal:

Es gibt ein $c \in \mathbb{R}^+$, $c < 1$ für alle $u, v \in A^*$, so dass gilt: $d(J(u), J(v)) \leq c \cdot d(u, v)$

Zur Überprüfung dieser Bedingung betrachten wir zwei Wörter

$u = U_1 U_2 U_3 \dots U_m U_{m+1} \dots$ und $v = V_1 V_2 V_3 \dots V_m V_{m+1} \dots$, die in den ersten m Zeichen übereinstimmen. Es gilt also $U_i = V_i$ für $i = 1, 2, \dots, m$ und $U_{m+1} \neq V_{m+1}$.

Dann ist $d(u, v) = \frac{1}{2^m}$.

Dann sind $J(u) = L U_1 R U_2 L U_3 \dots T_m U_m T_{m+1} U_{m+1} \dots$, $T_i \in \{L, R\}$ für $i \geq m$

und $J(v) = L V_1 R V_2 L V_3 \dots T_m V_m T_{m+1} V_{m+1} \dots$, $T_i \in \{L, R\}$ für $i \geq m$

Damit stimmen aber $J(u)$ und $J(v)$ in den ersten $2m+1$ Zeichen überein.

Folglich ist $d(J(u), J(v)) = \frac{1}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} d(u, v)$

Im ungünstigsten Fall, $m = 0$, gilt $d(J(u), J(v)) = \frac{1}{2} d(u, v)$

Damit haben wir gezeigt, dass J kontrahierend ist mit dem Kontraktionsfaktor $c = \frac{1}{2}$.

Damit erfüllen also A^* und der Inflationsoperator J die Voraussetzungen für das Banachsche Fixpunktprinzip und wir können uns den Folgerungen zuwenden.

(3) Die daraus resultierenden Eigenschaften

1. Jede Folge von Wörtern, die durch die iterierte Anwendung des Inflationsoperators J entsteht, hat einen Grenzwert, der unabhängig vom Startwert existiert. In Definition 3.2 wurde so die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert, der Startwert war $v_1 = L$. Der Grenzwert (bezüglich der oben definierten Metrik) ist die Papierfaltungsfolge ω .

Wir können hier einsehen, dass uns diese also nicht zufällig „in den Schoß gefallen“ ist, sondern eine Folge des kontrahierenden Inflationsoperators J auf der Menge von Zeichenketten.

2. Der Inflationsoperator J lässt den Grenzwert invariant. Das ist aber die Papierfaltungsfolge ω . Das bedeutet letztlich die Aussage des Satzes 3.3, also $J(\omega) = \omega$, die über diesen Weg noch einmal bewiesen wurde.

Deflation Das abwechselnde Einfügen von Tal- und Bergknicken bzw. „L“- und „R“-Symbolen kann man auch umgekehrt betrachten. Ein Wort w_n wird zerlegt in die abwechselnden „L“- und „R“-Symbole auf den ungeraden Plätzen und die Symbole des Wortes w_{n-1} . Diesen Vorgang nennt man Deflation.

L L R L L R R L L L R R L R R L L L R L L R R R L L R R L R R

Abb. 3.8: Zerlegung des Wortes w_5 in die abwechselnden LR-Symbole auf den Plätzen mit ungerader Nummer (nach oben verschoben) und dem Wort w_4 auf den Plätzen mit gerader Nummer (nach unten verschoben).

Auch diesen Prozess wollen wir formal in einem Operator auf $\{L,R\}^*$ darstellen.

Definition 3.5

Der Deflationsoperator

Es sei $A = \{L,R\}$ ein Alphabet mit nur zwei Symbolen.

Der Operator $D: A^* \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A^*$ heißt Deflationsoperator und erzeugt aus einem Wort $w = S_1 S_2 S_3 \dots S_n$ ein Wort aus A^* nach der Vorschrift

$$J(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } |w| = 1 \\ S_2 S_4 S_6 \dots S_m & \text{falls } |w| > 1 \end{cases} \quad \text{mit } m = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Der Deflationsoperator D ist jedoch nicht in voller Allgemeinheit der inverse Operator zu Inflationsoperator J . Dazu ist zu fordern, dass für alle Wörter w aus $A^* = \{L,R\}^*$ gilt: $D(J(w)) = w$, was offensichtlich immer gilt, aber auch $J(D(w)) = w$. Hier ist $w = \text{RLLLL}$ ein offensichtliches Gegenbeispiel.

Schränkt man allerdings die Menge der Zeichenketten auf die in Definition 3.2 definierten Wörter v_n ein, so ist der Deflationsoperator allerdings der zu J inverse Operator. Interessanter Weise ist die Papierfaltungsfolge ω ein Fixpunkt des Deflationsoperators, denn es gilt $D(\omega) = \omega$. Dieses ist die formale Beziehung, die hinter der Gesetzmäßigkeit für gerade Platznummern in der Papierfaltungsfolge ω steht (Satz 3.2 b)).

Die wiederholte Deflation ... Die Deflation wollen wir nun wiederholt für das Wort w_4 durchführen. Dabei werden die Symbole, wie in Abb. 3.8 schon angedeutet, auseinander gezogen.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	Platznummern
L	L	R	L	L	R	R	L	L	L	R	R	L	R	R	

1. Zerlegung															
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	
L		R		L		R		L		R		L		R	ungerade Plätze $2^0 \cdot u$
		L		L		R		L		L		R		R	gerade Plätze
2. Zerlegung															
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	
L		R		L		R		L		R		L		R	ungerade Plätze $2^0 \cdot u$
		L				R				L				R	Plätze mit $2^1 \cdot u$
				L				L				R			durch 4 teilbare Plätze
3. Zerlegung															
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	
L		R		L		R		L		R		L		R	ungerade Plätze $2^0 \cdot u$
		L				R				L				R	Plätze mit $2^1 \cdot u$
				L								R			Plätze mit $2^2 \cdot u$
								L							Plätze mit $2^3 \cdot u$

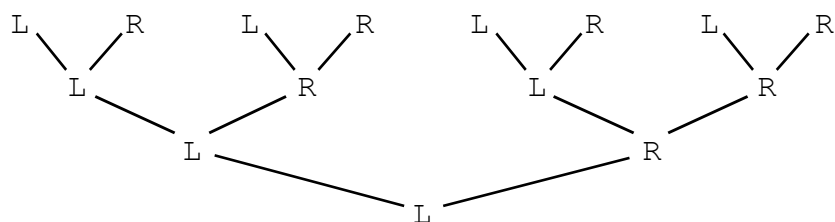
Dabei steht u für die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ...

Abb. 3.9: Die fortgesetzte Deflation des Wortes w_4

Die oberste Zeile enthält alle Symbole, die auf ungeraden Plätzen stehen, eine Zeile tiefer stehen die Symbole von Plätzen, deren Nummer genau einmal durch 2 teilbar ist u.s.w. Dabei steht in jeder Zeile einfach nur abwechselnd „L“ und „R“, was an dem Einfüllvorgang beim Inflationsgesetz liegt.

**... erzeugt ein
Baumdiagramm**

Noch übersichtlicher und leichter in seiner Entstehung nachvollziehbar wird das Diagramm, wenn man es durch Striche zu einem Baumdiagramm ergänzt. Von jedem Platz gehen nach oben zwei Zweige, an die man links ein „L“ und rechts ein „R“ schreibt.

Abb. 3.10: Das Wort w_4 als Baumdiagramm

Bildet man nun mit dem Inflationsgesetz aus dem Wort w_n das nächste Wort w_{n+1} , so „wächst“ der Baum an den oberen Enden eine Stufe weiter. An die Symbole der obersten Zeile wird je eine weitere Verzweigung aufgesetzt. Dadurch gelangen alle Symbole des Wortes w_n eine Zeile tiefer, was für ihre Nummerierung bedeutet, dass alle Platznummern verdoppelt werden.

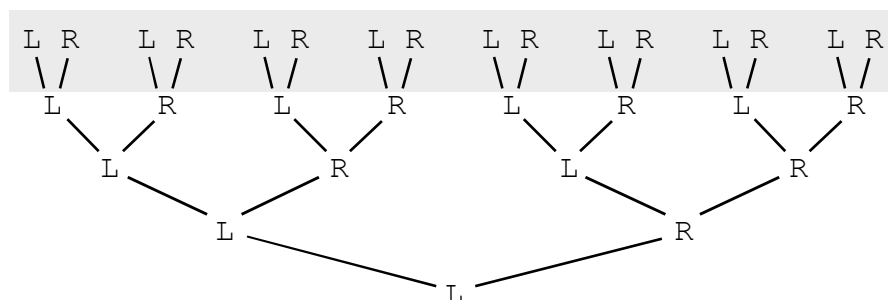


Abb. 3.11: Das Wort w_5 als Baumdiagramm. Die gegenüber dem Wort w_4 hinzugefügten „neuen Triebe“ sind grau unterlegt

Das Auseinanderziehen eines Papierfaltungswortes w_n in ein Baumdiagramm offenbart eine hoch regelmäßige Struktur, die wir weder den geknickten Papierstreifen noch den Wörtern w_n ansehen konnten. Die verwirrende, unregelmäßige Abfolge von „L“- und „R“-Symbolen erhält plötzlich eine leicht durchschaubare, hoch regelmäßige Struktur.

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

1. Unterrichtsvorschlag (zum Entdecken des Inflationsprozesses)

Benötigte Materialien

Für jeden Schüler (oder je 2 Schüler) 5 Papierstreifen

Fragestellung

Wo werden neue Knicke eingefügt, wenn man von einer Stufe des Faltens eine Stufe weiter geht?

Ablauf

Die Schüler sollen die Papierstreifen zwei Mal falten, auseinander ziehen und die vorhandenen Knicke mit einem Stift markieren. (s.o. Abb. 3.1) Dann sollen sie ihn wieder zusammenfalten und nun ein weiteres Mal falten. Zieht man den Streifen nun auseinander, kann man sehr gut die „alten“ Knicke (mit Markierung) von den „neuen“ (ohne Markierung) unterscheiden und analysieren.

Auswertung

Die Auswertung sollte so intensiv wie möglich geschehen. Hier bietet sich eine zentrale Stelle, das Papierfalten wirklich grundlegend zu verstehen. Für die Auswertung dienen die Leitfragen:

Wo werden die neuen Knicke eingefügt?

Zwischen dem Anfang und dem ersten, alten Knick, dann zwischen den alten Knicken jeweils einer und dann am Ende noch ein letzter, neuer Knick.

Welche Abfolge weisen die Knicke auf?

Die neuen Knicke sind abwechselnd Tal- und Bergknicke.

Warum ist das so?

Siehe Erläuterungen und Abbildungen 3.4 und 3.5 auf Seite 38.

Welche Regelmäßigkeit weisen die alten Knicke auf?

Die alten Knicke sind die vollständige LR-Folge der Ausgangsstufe.

Warum ist das so?

Als die alten Knicke markiert wurden, waren sie die Knicke einer vollständigen Papierfaltungsfolge.

2. Unterrichtsvorschlag (Entdecken der Regelmäßigkeit, zu jeder Platznummer das Symbol zu berechnen)

angesprochene schulmathematische Themen

Teilen mit Rest, einfache Zahlenfolgen

Benötigte Materialien

Anfang der Papierfaltungsfolge mit nummerierten Plätzen

LLRLLRLLRRLRRLRLLRLLRRRLRRLRRLRLLRLLRRLRRLRRLRRL...

[illegible]

Fragestellung

Wie kann man allein aus der Platznummer berechnen, ob dort ein „L“ oder „R“ steht?

Ablauf

Die Schüler sollen die Platznummern der Reihe nach folgenden 4 Kriterien zuordnen:

Die Platznummer ist ungerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „L“.

Die Platznummer ist ungerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „R“.

Die Platznummer ist gerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „L“.

Die Platznummer ist gerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „R“.

Ziel ist es, dass die Schüler zu jedem Kriterium eine Folge von Zahlen (Platznummern) erhalten, die sie dann, losgelöst von ihrem Entstehungsprozess analysieren sollen. Auf diese Weise sollen sie die Gesetzmäßigkeiten zur Ermittlung des Symbols auf einem Platz deduktiv ermitteln.

Auswertung

Die Schüler erhalten zu den vier Kriterien folgende Zahlenfolgen:

Die Platznummer ist ungerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „L“.

 $1, 5, 9, 13, 17, \dots$

Die Platznummer ist ungerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „R“.

3, 7, 11, 15, 19, ...

Die Platznummer ist gerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „L“.

2, 4, 8, 10, 16, 18, 20, 26, 32, ...

Die Platznummer ist gerade und das Symbol auf dem Platz ist ein „R“.

6, 12, 14, 22, 24, 28, 30, 38, ...

Natürlich erkennen die Schüler für die ungeraden Platznummern sofort die Gesetzmäßigkeit, meistens auch hier nur in rekursiver Form und rein sprachlich: „Die Platznummern nehmen immer um 4 zu.“ Den Unterschied der beiden Zahlenfolgen kann man dadurch hinterfragen, indem man das Problem stellt, in welcher Zahlenfolge

z.B. 1613 auftauchen wird. Zur Beantwortung solch einer Frage entwickeln Schüler pfiffige Problemlösungsstrategien⁷ und sie erkennen Regelmäßigkeiten wie z.B.: „Ist die Zehnerziffer gerade und die Einerziffer 1, 5 oder 9, oder ist die Zehnerziffer ungerade und die Einerziffer 3 oder 7, so steht auf dem Platz ein „L“. Mit dieser richtigen Regelmäßigkeit könnte man schnell ermitteln, dass auf dem Platz 1613 ein „L“ stehen muss. Eine Gesetzmäßigkeit, die mit dem Viererrest arbeitet, liegt den Schülern fern und entspricht nicht ihren bisherigen Erfahrungen mit Mathematik. Diese Gesetzmäßigkeit muss ggfs. vom Lehrer kommen.

Die Entwicklung einer Gesetzmäßigkeit für die geraden Plätze ist auf diese experimentell deduktive Weise nicht möglich. Diese muss im Lehrervortrag erfolgen und wird den Darstellungen auf Seite 41 folgen.

3. Unterrichtsvorschlag (Untersuchen des Inflationsprozesses bei variiertem Falten)

Benötigte Materialien

Für jeden Schüler (oder je 2 Schüler) 5 Papierstreifen

Fragestellung

Gilt das Inflationsgesetz auch dann, wenn wir beim Falten auch „rechts unter links“ zulassen?

Ablauf

Da nun zwei Arten des Faltens möglich sind, muss man sich zu Beginn eine Faltfolge vorgeben. Man beginnt am besten mit der alternierenden Faltfolge „über - unter - über - unter ...“. Die Schüler sollen die Papierstreifen falten, auseinander ziehen und die LR-Zeichenfolge notieren. Die Frage nach der richtigen Orientierung der Streifen soll dadurch geklärt werden, dass wie zu Beginn dieses Kapitels die „alten“ Knicke markiert werden und in den nächsten LR-Zeichenfolge erhalten bleiben.

Das Protokoll ist dann :

- | | |
|-----------|-------------------------------|
| 1. Stufe: | L |
| 2. Stufe: | RLL |
| 3. Stufe: | LRLLLLR |
| 4. Stufe: | RLLRRLLRLLLRRL |
| 5. Stufe: | LRLLLLRRLRRLLRLLRLLLRLLRRRLLR |

Auswertung

Natürlich ist zu erwarten, dass, wenn das Inflationsgesetz überhaupt gilt, es dann leicht modifiziert werden muss. Sucht man im oben stehenden Protokoll nach den einzelnen Eigenschaften des Inflationsgesetzes, so erkennt man.

- Die Knicke der vorhergehenden Stufe stehen auf den geraden Plätzen der aktuell betrachteten LR-Zeichenfolge.
- Die neu eingefügten Zeichen stehen auf den ungeraden Plätzen.
- Die neu eingefügten Zeichen sind immer abwechselnd „L“ und „R“

Die einzige Modifikation, die vorzunehmen ist und die Anpassung an die modifizierte Art des Faltens darstellt, besteht darin, das wechselseitige Einfügen mit einem „L“ zu

⁷ Nach eigenen Erfahrungen im wiederholten Unterricht in Klasse 10

beginnen, wenn das Knicken mit „rechts über links“ erfolgte, und mit einem „R“ zu beginnen, wenn „rechts unter links“ verwendet wurde.

Diese Gesetzmäßigkeit kann man in Versuchen erhärten, bei denen die Faltfolge keine regelmäßige Abfolge von „rechts über links“ und „rechts unter links“ darstellt.

Der Vergleich mit dem entsprechenden Versuch zum Reflexionsgesetz am Ende des 2. Kapitels zeigt, dass das Inflationsgesetz das allgemeinere ist und das Reflexionsgesetz nur im Spezialfall des reinen „rechts über links“ gilt (bzw. auch im Fall des reinen „rechts unter links“).