2 Das Reflexionsgesetz

Wir wollen hier das beginnen, was wir am Ende des ersten Kapitels herausgestellt haben. Der mathematische Forschungsprozess besteht darin, Muster zu erkennen, zu untersuchen und dann diese Untersuchung in das Umfeld auszuweiten. Dazu konzentrieren wir uns zunächst auf die durch Abstraktion gewonnenen LR-Folgen und deren Entwicklung von Stufe zu Stufe.

Die erste Hälfte ist bekannt

Im letzten Kapitel haben wir bei der Übersetzung der gefalteten Papierstreifen in LR-Folgen bereits gesehen, dass jede so beginnt wie die gesamte LR-Folge der vorhergehenden Stufe lautet.

erster Streifen:	`L`
zweiter Streifen:	`LLR`
dritter Streifen:	`LLRLLRR`
vierter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRR`
fünfter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR`

Wollte man nun z.B. die LR-Folge zum 6. Streifen hinschreiben, so weiß man, wie man beginnen sollte und wie die ersten 31 Symbole lauten. Doch der 6. Streifen hat insgesamt $2^6 - 1 = 63$ Symbole und es bleibt die Frage, wie sich die noch fehlenden 32, also praktisch die zweite Hälfte, ergeben.

erneut Zusammenfalten

Das kann man sehr schön herausfinden, wenn man einen Papierstreifen, z.B. den zur dritten Stufe, wieder in der Mitte zusammenfaltet.

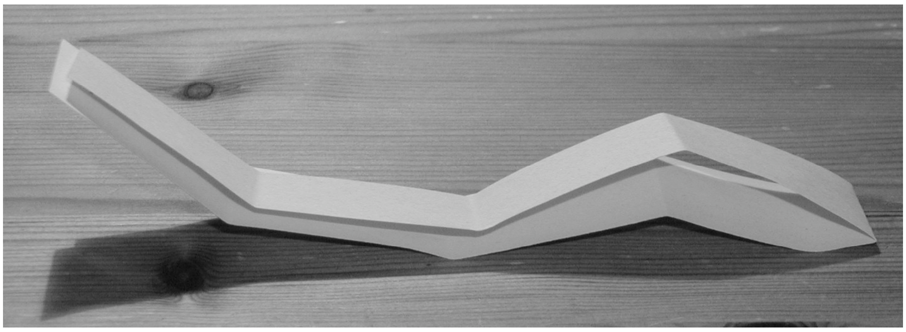

Abb. 2.1: Der dritte Streifen ist in der Mitte zusammengefaltet

Klappt man nun die obere Hälfte wieder nach rechts, so ist unmittelbar einsichtig, dass aus einem Berg- ein Talknick wird und umgekehrt. Ebenso ist leicht einzusehen, dass sich die Abfolge der Knicke im ersten Teil (unten) im zweiten, herüber geklappten Teil in umgekehrter Reihenfolge wiederholt. Der letzte Knick im ersten (unteren) Teil ist ein Bergknick, dieser wird zu einem Talknick, der der erste Knick im zweiten Teil wird.

Reflexionsprozess

Insgesamt entsteht also die zweite Hälfte des Papierstreifens aus der reflektierten ersten Hälfte. Beim Reflektieren wird

- die Reihenfolge der Knicke umgedreht
- aus jedem Berg- ein Talknick und umgekehrt.

Zwischen den beiden Hälften ist immer ein Talknick. Das ist nämlich genau der Talknick, mit dem beim ersten Falten der Streifen in zwei Hälften zerteilt wird. Man kann sich davon sehr schön an einem Papierstreifen überzeugen. Man nimmt dazu einen neuen Streifen und knickt ihn einmal, rechts über links. Diesen Knick, ein

Talknick, zeichnet man mit einem Stift nach. Wenn man nun beim weiteren Falten wieder diesen markierten Knick sucht, erkennt man, dass es immer der mittlere ist.

Diese Gesetzmäßigkeit, die wir an den realen Papierstreifen entdecken konnten, übertragen wir nun in die Welt der LR-Folgen. Natürlich müssen wir diese Gesetzmäßigkeiten auch dort wieder finden. Dazu zerlegen wir jede Zeichenfolge in eine vordere „Hälfte“, das mittlere Symbol und die hintere „Hälfte“:

Die Zerlegung der LR-Folgen

1. Stufe		L	
2. Stufe	L	L	R
3. Stufe	LLR	L	LRR
4. Stufe	LLRLLRR	L	LLRRLRR
5. Stufe	LLRLLRRLLLRRLRR	L	LLRLLRRRLLRRLRR

Und in der Tat sehen wir, dass das mittlere Symbol immer ein „L“ ist und dass die Reflexionseigenschaften gelten: die zweite Hälfte wiederholt die erste von hinten, wobei ein „R“ zu einem „L“ gehört und umgekehrt.

L L R **L** L R R

Abb. 2.2: Der Reflexionsvorgang an der 3. Stufe der LR-Folgen

Damit haben wir vollständig analysiert, wie die LR-Folgen von Stufe zu Stufe gebildet werden.

induktive Erkenntnisgewinnung

Die Gesetzmäßigkeit des Reflektierens am mittleren Knick haben wir aus der Betrachtung von endlich vielen, nämlich fünf, realen Papierstreifen gewonnen. Allerdings gehen wir darüber hinaus, denn insbesondere durch die Begründungen sind wir überzeugt, dass diese Gesetzmäßigkeit auch für den Übergang von der 7. zur 8. Stufe gilt, obwohl wir das an realen Papierstreifen nicht überprüft haben.

Die Erkenntnis wurde induktiv gewonnen. Versuche waren die Ausgangsbasis, ein allgemeines Gesetz das Ergebnis. Dabei ist die Verknüpfung der Gesetzmäßigkeiten mit den Experimenten unvollständig, denn die tatsächliche Überprüfung z.B. der siebten Stufe ist zumindest schwierig, höhere Stufen ließen sich nur sehr aufwändig realisieren und jede Stufe kann natürlich nicht konkret geprüft werden. Für Mathematiker ist solch ein Vorgehen fruchtbar für den Erkenntnisprozess, er reicht jedoch für die Erkenntnissicherung nicht aus. Für die experimentellen Naturwissenschaften ist es jedoch die wesentliche Arbeitsweise.

Die formale, mathematische Herangehensweise ist anders als die naturwissenschaftlich orientierte. Da wir für einen exakten, mathematischen Beweis keine grundlegende Gesetzmäßigkeit haben, mit deren Hilfe wir die Gültigkeit des Reflexionsprozesses für alle LR-Folgen beweisen könnten, gehen wir umgekehrt vor. Wir definieren uns eine Folge von Wörtern, die mit Hilfe des Reflexionsvorganges konstruiert wird.

Definition 2.1

Es sei $A = \{L,R\}$ ein Alphabet mit 2 Symbolen und $S \in A$.

a) Dann bedeutet $\overline{S} = \begin{cases} \text{R falls } S = \text{L} \\ \text{L falls } S = \text{R} \end{cases}$.

b) Es sei $w = S_1 S_2 S_3 ... S_n$, $n \in \mathbb{N}$ ein Wort aus A^*. Dann bedeutet $\overline{w} = \overline{S}_n ... \overline{S}_3 \overline{S}_2 \overline{S}_1$

D.h. in dem gequerten Wort ist die Reihenfolge der Symbole vertauscht und jedes Symbol wird durch das andere aus A ersetzt.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar: $\overline{\overline{S}} = S$ für alle $S \in A$ und $\overline{\overline{w}} = w$ für alle $w \in A^*$.

Definition 2.2

Reflexionsoperator

Es sei $A = \{L,R\}$ ein Alphabet mit nur 2 Symbolen.
Der Operator $F: A^* \to A^*$ heißt Reflexionsoperator und erzeugt aus einem Wort $w \in A^*$ ein anderes Wort nach der Vorschrift: $F(w) = \begin{cases} \text{L} & \text{falls } w = \varnothing \\ w\text{L}\overline{w} & \text{falls } w \neq \varnothing \end{cases}$

Definition 2.3

Die Folge der Papierfaltungswörter

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von Wörtern aus $\{L,R\}^*$, die folgendermaßen rekursiv definiert ist:
$w_1 = \text{L}$, $w_{n+1} = F(w_n)$

Die ersten 5 Wörter dieser Folge sind:

w_1 =L

$w_2 = F(w_1) = w_1 \text{L} \overline{w}_1$ =LLR

$w_3 = F(w_2) = w_2 \text{L} \overline{w}_2$ =LLRLLRR

$w_4 = F(w_3) = w_3 \text{L} \overline{w}_3$ =LLRLLRRLLLRRLRR

$w_5 = F(w_4) = w_4 \text{L} \overline{w}_4$ =LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR

Beim formalen, mathematischen Aufbau des Papierfaltens erhält das Reflexionsgesetz eine grundlegend andere Rolle als beim experimentellen Erforschen der geknickten Papierstreifen:

Auf der experimentellen Ebene haben wir die Papierstreifen untersucht und das Reflexionsgesetz als ein Muster erkannt, das aus dem Faltvorgang folgt. In der für die Naturwissenschaften typischen induktiven Vorgehensweise wird diese Gesetzmäßigkeit von einer endlichen Anzahl von Experimenten auf alle weiteren, in der Zukunft ausführbaren Experimente ausgedehnt.

Für den formalen Aufbau ist der Schluss von einer endlichen, geprüften Menge auf eine unendliche Menge von Fällen erkenntnistheoretisch unhaltbar. Die Aussage, dass das Reflexionsgesetz für alle Wörter der laut Definition 2.3 gebildeten Wörter $w_n, n \in \mathbb{N}$ gilt wird dadurch erfüllt, dass sie ja mit Hilfe des Reflexionsgesetzes gebildet wurden. Das kehrt die Herangehensweise gegenüber der experimentellen Sicht um.

Das Erforschen von Mustern fördert neue zu Tage

Insofern hat unser Forschungsprozess im Umfeld der erkannten Muster ein neues erzeugt, nämlich die mit dem Reflexionsoperator erzeugte Wortfolge. Konsequenter Weise werden wir in diesem Umfeld ebenfalls weitere Untersuchungen anstellen.

Ziehen wir aus der Definition der Wörter $w_n, n \in \mathbb{N}$ einige einfache Schlüsse:

Satz 2.1

Anzahl der Symbole

Im Wort $w_n, n \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der „R“ $2^{n-1}-1$, die Anzahl der „L“ 2^{n-1} und die Anzahl aller Symbole, also $|w_n| = 2^n - 1$.

Beweis (vollständige Induktion über *n*)

Induktionsanfang: $n = 1$: $w_1 = \mathrm{L}$ Folglich ist die Anzahl der „R“ $2^{1-1}-1=0$, die Anzahl der „L“ $2^{1-1}=1$ und die Anzahl aller Symbole, also $|w_1| = 2^1 - 1 = 1$.

Induktionsschluss: Sei im Wort w_k die Anzahl der „R“ $2^{k-1}-1$, die Anzahl der „L“ 2^{k-1} und die Anzahl aller Symbole, also $|w_k| = 2^k - 1$. Dann ist das Wort $w_{k+1} = F(w_k) = w_k \mathrm{L} \overline{w}_k$. In $\overline{w}_k$ sind die Symbole „L“ und „R“ gegenüber dem Wort w_k gegenseitig ersetzt. Folglich ist in $\overline{w}_k$ die Anzahl der „R“ 2^{k-1}, die Anzahl der „L“ $2^{k-1}-1$.
Dann ist in w_{k+1} die Anzahl der „R“ $2^{k-1}-1+2^{k-1}=2^k-1$,
die Anzahl der „L“ $2^{k-1}+1+2^{k-1}-1=2^k$
und die Anzahl aller Symbole $|w_{k+1}| = |w_k| + 1 + |\overline{w}_k| = (2^k-1)+1+(2^k-1) = 2^{k+1}-1$
Damit ist die Behauptung für alle $w_n, n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Für die Formulierung weiterer Eigenschaften, die in den Wörtern der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vorhanden sind, definieren wir eine Funktion $\tilde{\sigma}$, die das Symbol an einer Stelle in einem Wort angibt:

Definition 2.4

Die Funktion $\tilde{\sigma}$

Es sei A ein Alphabet. Dann sei $\tilde{\sigma}: A^* \times \mathbb{N} \to \mathrm{A}$ eine Funktion, wobei $\tilde{\sigma}(v,k)$ im Wort v das k-te Symbol angibt, $1 \le k \le |v|$.

Beispiel:
$\tilde{\sigma}(w_3, 5)$ =L, denn im Wort $w_3 = \mathrm{LLRLLRR}$ ist das 5. Symbol ein „L“.

Mit der Funktion $\tilde{\sigma}$ können wir die Regelmäßigkeit, die der Reflexionsoperator den Wörtern w_n beim Bilden aus dem vorhergehenden Wort aufprägt, in folgender Weise aufschreiben:

Satz 2.2

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $m \in \mathbb{N}, m < n$ und alle $k \in \mathbb{N}, k < 2^m$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_m, k)$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0, k < n$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_n, 2^k) = \mathrm{L}$

d.h. auf allen Positionen mit den Nummern 1, 2, 4, 8, 16, ... steht ein „L“.

Das Reflexionsgesetz

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}, k < 2^{n-1}$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_n, 2^n - k)$

Beweis:

Zu a) Die Aussage besagt, dass alle Symbole in einem Wort am selben Platz in allen vorangehenden Wörtern gleich sind. Das folgt unmittelbar aus der Definition der Wörter w_n.

Zu b) Sei $2^k < 2^n$ eine Position im Wort w_n. Ist $k = 0$ so ist $2^k = 1$. An Position 1 steht ein „L". Sei $k \geq 1$. Wegen $w_{k+1} = F(w_k) = w_k \mathrm{L} \overline{w}_k$ und $|w_k| = 2^k - 1$ (Satz 2.1) steht an Position 2^k ein „L" im Wort w_{k+1}. Also gilt $\tilde{\sigma}(w_{k+1}, 2^k) = \mathrm{L}$. Da $k+1 \leq n$ gilt nach Satzteil a) $\tilde{\sigma}(w_{k+1}, 2^k) = \tilde{\sigma}(w_n, 2^k) = \mathrm{L}$.

Zu c) Da der formale Beweis sofort aus dem Reflexionsoperator folgt, ist ein Beispiel hier aufschlussreicher: Dargestellt ist das Wort w_5, dessen mittleres Symbol auf Platz $16 = 2^4$ steht.

```
LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR
         1     1    2        3
1234567890123456789012345678901
```

Das Symbol auf Platz 10 ist ein „L", das Symbol auf Platz $2^5 - 10 = 22$ ist ein „R".

Satz 2.3

Das Translationsgesetz

Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n-2$ und alle $k \in \mathbb{N}$, $k < 2^m$ gilt:

$\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_n, k + 2^{m+1})$

Beweis:

$\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_{m+1}, k)$ nach Satz 2.2 a)

$= \overline{\tilde{\sigma}(w_{m+1}, 2^{m+1} - k)}$ nach dem Reflexionsgesetz 2.2 c)

$= \overline{\tilde{\sigma}(w_{m+2}, 2^{m+1} - k)}$ nach Satz 2.2 a)

$= \overline{\overline{\tilde{\sigma}(w_{m+2}, 2^{m+2} - (2^{m+1} - k))}}$ nach dem Reflexionsgesetz 2.2 c)

$= \tilde{\sigma}(w_{m+2}, 2^{m+1} + k)$ Zusammenfassen der Zweierpotenzen

$= \tilde{\sigma}(w_n, k + 2^{m+1})$ nach Satz 2.2 a)

Die Voraussetzung des Satzes 2.3 fordert, dass die Position k eine der ersten $2^{n-2} - 1$ Positionen im Wort w_n ist, also eine Position im Wort w_{n-2}, das den Anfang des Wortes w_n bildet.

Beispiel: $n = 6$, $m = 3$

LLRLLRRLLLRRLRRL**LLRLLRR**RLLRRLRRL**LLRLLRR**LLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLR

Verschiebung um 16 Plätze

Verschiebung um 32 Plätze

Abb. 2.3: w_3 taucht in w_6 zwei Mal verschoben auf

Das Wort w_3 kommt um $2^{3+1} = 16$ Plätze verschoben im Wort w_6 vor. Außerdem ist w_3 der Anfang von w_4, welches um $2^{4+1} = 32$ Plätze verschoben wieder vorkommt, also auch dessen Beginn, gebildet aus dem Wort w_3.

Den Namen „Translationsgesetz" haben wir wegen der Analogie zur Geometrie gewählt.

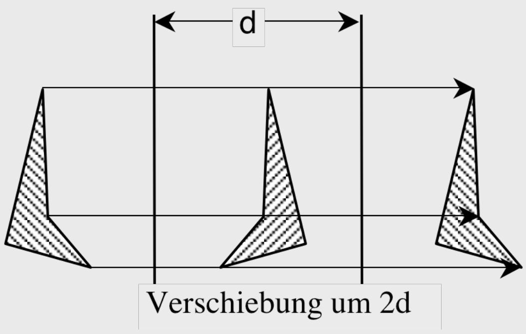

Abb. 2.4: Die Spiegelung an zwei parallelen Geraden

Die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden, die den Abstand d haben, ergibt eine Translation. Dabei ist der Translationsvektor senkrecht zu den Geraden und hat die Länge $2d$.
Betrachten wir diese Analogie an w_6 für die Verschiebung von w_3 um 32 Plätze:

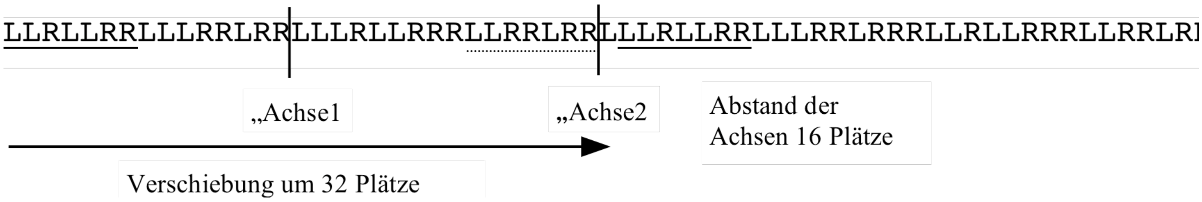

Abb. 2.5: Zwei Reflexionen ergeben eine Verschiebung

Von Platz 1 bis 7 steht das Wort w_3 (unterstrichen), das an dem „L“ auf Platz 16 reflektiert wird und so das Wort $\overline{w}_3$ auf den Plätzen 25 bis 31 bildet (unterbrochen unterstrichen). $\overline{w}_3$ wird nun an dem „L“ auf Platz 32 ein zweites Mal reflektiert und bildet das Wort w_3 auf den Plätzen 33 bis 39. Die beiden Achsen haben einen Abstand von 2^4=16 Plätzen, die Verschiebung geschieht um 32 = 2·16 (geometrisches Gesetz) = 2^5(Translationsgesetz) Plätze.

Wir wollen unsere Betrachtungen über die Wörter w_n erweitern, indem wir zu den endlichen Wörtern die unendliche Fortsetzung, also den Grenzwert für n gegen ∞ betrachten. Dieser Grenzwert existiert, da das Symbol an einem Platz konstant ist, unabhängig vom Index des Wortes $w_n, n \in \mathbb{N}$ (Satz 2.2a)).

Definition 2.5

Die Papierfaltungsfolge

Das Wort $\omega \in \{L,R\}^*$ ist unendlich lang und heißt Papierfaltungsfolge. Das Symbol auf Platz k in ω ist definiert durch das k-te Symbol im Wort $w_n, n \in \mathbb{N}, 2^n > k$.

Wir definieren nun, analog zur Funktion $\tilde{\sigma}$, die einem endlichen Wort w und der Platznummer k das Symbol zuordnet, die entsprechende Funktion für die Papierfaltungsfolge ω.

Definition 2.6

Die Funktion σ

Es sei $\sigma : \mathbb{N} \to \{L,R\}$ eine Funktion, wobei $\sigma(k), k \in \mathbb{N}$ das k-te Symbol in der Papierfaltungsfolge ω angibt.

Insbesondere gilt also für σ : $\sigma(k) = \tilde{\sigma}(w_n, k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $k < 2^n$.

Wir wollen nun die in den Sätzen 2.2 und 2.3 festgestellten Eigenschaften so weit es geht auf die Papierfaltungsfolge ω übertragen.

Satz 2.4

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sigma(2^k) = \text{L}$

b) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k < 2^n$ gilt: $\sigma(k) = \overline{\sigma(2^n - k)}$

Beweis

Satz 2.4 a) ergibt sich direkt aus Satz 2.2 b) und Satz 2.4 b) direkt aus Satz 2.2 c)

Das zum Translationsgesetz analoge Gesetz ist

Satz 2.5

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $k < 2^m$ gilt: $\sigma(k) = \sigma(k + 2^{m+1})$

Beweis

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $k < 2^m$ gibt es ein n mit $k + 2^{m+1} < 2^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sigma\left(k + 2^{m+1}\right) &= \tilde{\sigma}\left(w_n, k + 2^{m+1}\right)\\ &= \tilde{\sigma}\left(w_n, k\right) \text{ nach Satz 2.3 } .\\ &= \sigma(k) \text{ nach Definition 2.6}\end{aligned}$$

Folgerung

Satz 2.5 gilt insbesondere für die minimale Wahl der Zweierpotenz zu einem Platz k. Da aber jede Zweierpotenz, die größer als diese minimale ist, die Voraussetzung für Satz 2.5 erfüllt, besagt Satz 2.5 letztlich, dass ein Symbol, das unter den ersten 2^m Zeichen vorkommt, mit jeder Zweierpotenz, die echt größer als 2^m ist, wiederholt wird.

Beispiel

LLRLLRRL**LLR**RLRRL**LLR**LLRRRLLRRLRRL**LLR**LLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLL
0000000001111111111222222222233333333334444444444555555555
1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678

Für die ersten drei Symbole ist $2^2 = 4$ die minimale Zweierpotenz (m = 2). Also muss $2^3 = 8$ Plätze weiter die gleiche Sequenz wiederholt werden, ebenso $2^4 = 16$ und $2^5 = 32$ Plätze weiter.

Berechnung des Symbols an einem beliebigen Platz

Das Reflexionsgesetz ist die erste Regelmäßigkeit, die wir in den verwirrenden LR-Folgen erkannt haben und mit deren Hilfe wir diese Stufe für Stufe erzeugen können.

Doch das Reflexionsgesetz kann mehr leisten. Auf der Basis des Reflexionsgesetzes können wir einen ersten Algorithmus entwickeln, mit dem wir für jeden beliebigen Platz berechnen können, ob dort ein „L“ oder ein „R“ steht. Dazu spiegeln wir den zu untersuchenden Platz immer wieder „zurück“, bis wir auf einen Platz kommen, für den wir genau wissen, ob dort ein „L“ oder „R“ steht. Um dieses Rückwärtsspiegeln zu verstehen, müssen wir zunächst einmal verfolgen, was mit einem Symbol beim fortgesetzten Vorwärtsspiegeln geschieht.

Betrachten wir z.B. das „L“ auf dem 4. Platz. Es kommt zum ersten Mal in w_3 vor, das 7 Zeichen hat. Im Schritt vom 3. zum 4. Wort wird ein „L“ angehängt (8. Platz) und w_3 reflektiert, dadurch kommt als Bild des „L“ vom 4. Platz ein „R“ auf den 12. Platz.

```
...L...|...R...|...L...........|...........R.........
         1         2         3         4         5
12345678901234567890123456789012345678901234567890...
```

Abb. 2.6: Symbole, die durch Reflexion zusammenhängen

Das nächste Reflektieren geschieht am 16. Platz und das „R“ vom 12. Platz kommt als „L“ auf den 20. Platz. Die neue Platznummer ermitteln wir, indem wir zunächst den Abstand vom aktuellen Platz zur nächst größeren Zweierpotenz bestimmen und dann diesen Abstand zur Zweierpotenz addieren. Das „L“ von Platz 20 wird am 32. Platz reflektiert und wir erhalten das „R“ auf Platz 44. Die „Spiegelachsen“ (in Abb. 2.6 durch | gekennzeichnet) für diesen Prozess sind immer die Plätze mit Zweierpotenzen als Nummern und auf diesen steht immer ein „L“.

Nach diesen Vorüberlegungen ist der eigentliche Algorithmus für das Rückwärtsspiegeln leicht zu verstehen.

Welches Symbol steht auf Platz m?	Beispiel: m = 92
1. Bestimme die kleinste Zweierpotenz 2^n größer als m: $2^{n-1} < m < 2^n$	$2^6 = 64 < 92 < 128 = 2^7$
2. Die Differenz des aktuellen Platzes zur nächst höheren Zweierpotenz ist der „rückwärts gespiegelte“ Platz p: $p = 2^n - m$	$p = 128 - 92 = 36$
3. Wiederhole 1. und 2., bis die neue Platznummer p eine Zweierpotenz selbst ist (das ist ggf. $1 = 2^0$). Zähle dabei die Anzahl der Schritte mit.	2. Schritt: $2^n = 64$ $p = 64 - 36 = 28$ 3. Schritt: $2^n = 32$ $p = 32 - 28 = 4$ Abbruch, da mit $p = 4$ eine Zweierpotenz erreicht ist
4. Ist die Anzahl der Schritte gerade, steht auf dem zu untersuchenden Platz *m* auch ein „L“, ist die Anzahl aber ungerade, so steht auf Platz *m* ein „R“.	3 Schritte → auf Platz 92 steht ein „R“

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

Im Unterricht wird man immer von den gefalteten Papierstreifen der Stufe 1 bis 5 ausgehen und diese untersuchen. Davon ausgehend sollen die Schüler Eigenschaften erkennen, die dann verallgemeinert werden.

Besonders für den Anfang der Forschungstätigkeit kommt es auf die richtigen Fragestellungen an, die fast durchgängig vom Lehrer ausgehen müssen, da dieses

Thema nicht auf der Hauptlinie des Schulstoffes liegt und somit die Fragestellungen neu und für die Schüler ungewohnt sind. Andererseits macht es gerade den Reiz dieses Themas aus, dass sehr viele mathematische Themen angesprochen werden.

Ein auseinander gezogener Streifen zeigt zwar direkt die Symbole des zugehörigen Wortes w_i, $1 \le i \le 5$, die Schüler müssen jedoch erst lernen, ihn richtig zu lesen und zu protokollieren. Für eine einheitliche Betrachtung innerhalb der Klasse muss man festlegen, dass der Streifen noch vor dem Falten an der linken Seite eine Anfangsmarkierung bekommt und nach dem Falten und Auseinanderziehen immer so gewendet wird, dass bei der Anfangsmarke als erster ein Talknick liegt.

1. Unterrichtsvorschlag (Zum Satz 2.1)

Angesprochene schulmathematische Themen

Potenzrechnung, elementare Zahlenfolgen

Benötigte Materialien

Für jeden Schüler (oder je 2 Schüler) 5 Papierstreifen

Fragestellung

Wie viele Berg-, wie viele Talknicke und wie viele Knicke insgesamt haben die Papierstreifen? Kann man für diese Zahlen eine Gesetzmäßigkeit erkennen?

Ablauf

Die Schüler sollen die Papierstreifen falten, auseinander ziehen und richtig orientieren (Talknick als ersten Knick an der Anfangsmarke). Dann sollen sie für jeden Streifen die Knicke nachzählen und die Zahlen in eine Tabelle eintragen.

Stufe	1	2	3	4	5	6	n
Zahl der Talknicke	1	2	4	8	16	32	2^{n-1}
Zahl der Bergknicke	0	1	3	7	15	31	$2^{n-1}-1$
Zahl der Knicke	1	3	7	15	31	63	2^n-1

Die Spalten 6 und n dienen einer Vorhersage und bleiben zunächst unausgefüllt.

Auswertung

Schüler erkennen sehr schnell die einfachen Zusammenhänge[3] und nennen für die Entwicklung der Zahlen in einer Zeile fast immer ein rekursives Gesetz:

Zahl der Talknicke: $t_k = 2 \cdot t_{k-1}$

Zahl der Bergknicke: $b_k = 2 \cdot b_{k-1} + 1$

Zahl der Knicke: $a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1$

Diese Gesetze können insbesondere Schüler der Sekundarstufe I oft nur sprachlich ausdrücken „Die nächste Zahl ist das Doppelte der vorhergehenden Zahl plus Eins“, nicht aber algebraisch.

[3] Nach eigenen Erfahrungen im wiederholten Unterricht in Klasse 10

Daher ist die Fortführung der Tabelle auf die Stufe 6 für die Schüler leicht. Dagegen benötigt die Verallgemeinerung auf die Stufe *n* eine Hilfestellung durch den Lehrer, die am günstigsten für die Zahl der Talknicke erfolgt: $t_k = 2^{k-1}$. Danach liegen die Terme für die Zahl b_k der Bergknicke und a_k der (Gesamt-)Knicke für die Schüler in realistischer Reichweite: $b_k = 2^{k-1} - 1$ und $a_k = 2^k - 1$

Nach dieser ersten Übung zum Umgang mit den gefalteten Streifen strebt man die Kodierung der Steifen durch Symbolfolgen an. Als Motivation dient die höhere Genauigkeit des Protokolls: Während nur die reine Zahl der Knicke nichts über deren Reihenfolge aussagt, ist eine Angabe wie Tal-Tal-Berg-Tal-Tal-Berg-Berg sehr viel genauer. Die Verkürzung des Protokolls auf nur einen Buchstaben für einen Knick entspricht Vorgehensweisen, die die Schüler vom Einführen von einbuchstabigen Variablen kennen. Man sollte aus ökonomischen Gründen sofort die Buchstaben „L“ und „R“ einführen. Der Hinweis, dass sich diese Buchstabenwahl später als sinnvoll erweist, reicht als Begründung aus, eventuell führt man ein Beispiel der geometrischen Interpretation an (siehe Kapitel 4).

2. Unterrichtsvorschlag (zur Definition der Wörter w_n, konkret w_1 bis w_5)

Angesprochene schulmathematische Themen

(Achsenspiegelung)

Benötigte Materialien

Für jeden Schüler (oder je 2 Schüler) 5 Papierstreifen

Hier ist es günstiger, in Zweiergruppen zu arbeiten, da so die umfangreichen Protokolle leichter zu erstellen sind: ein Schüler schreibt, der andere diktiert die Abfolge der Knicke.

Fragestellung

Welche Gesetzmäßigkeiten tauchen bei der Abfolge der Berg- und Talknicke auf und lässt sich diese Abfolge für höhere Stufen vorhersagen?

Ablauf

Die Schüler sollen die Papierstreifen falten, auseinander ziehen und richtig orientieren (Talknick als ersten Knick an der Anfangsmarke). Dann sollen sie für jeden Streifen die Abfolge der Knicke aufschreiben, und zwar in der Codierung „L“ für Talknick und „R“ für Bergknick.

Auswertung

Insbesondere wenn die Buchstaben der verschiedenen Streifen gleichmäßig untereinander geschrieben wurden, erkennen die Schüler sehr schnell, dass jedes Wort das vorhergehende zunächst wiederholt. Die Fortsetzung ist aber offen und wird nur sehr selten[4] von Schülern sofort durchschaut.

Diese Gesetzmäßigkeit, das Reflexionsgesetz, können die Schüler entdecken, wenn man sie auffordert, einen Streifen, am besten den 3. Streifen, in der Mitte noch einmal zusammenzufalten. (s.o. Abb. 2.1)

[4] nach eigenen Erfahrungen im wiederholten Unterricht in 10. Klassen

Klappt man nun die obere Hälfte wieder nach rechts, so ist unmittelbar einsichtig, dass aus einem Berg- ein Talknick wird und umgekehrt. Mit einem entsprechenden Hinweis ist ebenfalls leicht einzusehen, dass sich die Abfolge der Knicke im ersten Teil (unten) im zweiten, herüber geklappten Teil in umgekehrter Reihenfolge wiederholt.

Diese Erkenntnis sollte man anschließend in den aufgeschriebenen LR-Wörtern verifizieren.

Das Rückwärtsspiegeln ist eine erste Möglichkeit, für einen beliebigen Platz in einem beliebig langen Papierfaltungswort zu berechnen, ob dort ein „L“ oder „R“ steht. Für die Schüler wird dabei in überraschender Weise ein geometrischer Sachverhalt (Spiegeln) rein numerisch umgesetzt beim Berechnen der Platznummer des (rückwärts) gespiegelten Platzes.

3. Unterrichtsvorschlag (zum Satz 2.2 c) (Reflexionsgesetz))

angesprochene schulmathematische Themen

(Achsenspiegelung), Aufstellen von Gleichungen

Benötigte Materialien

Das Wort w_5 mit nummerierten Plätzen

```
LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR
         1     1   2         3
1234567890123456789012345678901
```

Fragestellung

Wie berechnet man zu einer Platznummer rechts von der Wortmitte die Ausgangsplatznummer links von der Wortmitte?

Ablauf

Systematisches Probieren:

Die Schüler können systematische Beispiele am Wort w_5 bilden: Platz 17 wurde vom Platz 15 herübergespiegelt, Platz 18 von Platz 14, ... , Platz 31 vom Platz 1. Die Schüler sehen schnell ein, dass die Summe beider Platznummern 32 ist. Ist b die Platznummer des Bildes und u die Platznummer des Urbildes, so gilt $b + u = 32 = 2^5$. Die Verallgemeinerung auf ein Wort w_n führt auf $b + u = 2^n$. Für das Rückwärtsspiegeln wird diese Gleichung aufgelöst nach u: $u = 2^n - b$.

Geometrisch orientierte Herleitung:

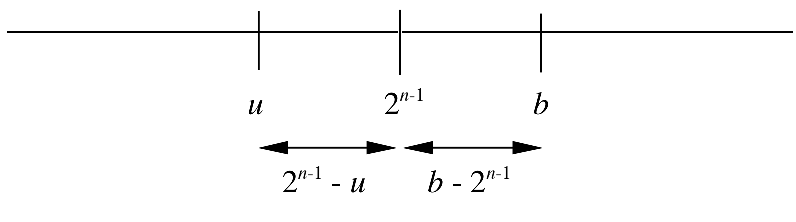

Abb. 2.7: Die Skizze zur geometrischen Herleitung

Die Eigenschaft der Spiegelung, dass Urbild und Bild gleich weit von der Spiegelachse entfernt sind, führt sofort zur Gleichung $2^{n-1} - u = b - 2^{n-1}$. Die Auflösung nach u liefert $u = 2^n - b$. Von der Richtigkeit des Ansatzes und des Ergebnisses kann man sich am Beispiel w_5 überzeugen.

Auswertung

Hat man den Prozess des Rückwärtsspiegelns einmal verstanden, fällt es leicht, diesen wiederholt anzuwenden. Man kann so ein Verfahren entwickeln, für einen beliebigen Platz nur aus der Kenntnis seiner Nummer zu berechnen, ob dort ein „L“ oder „R“ steht. Denn kommt man beim Rückwärtsspiegeln auf einen Platz, dessen Symbol man kennt, kann man von diesem Platz wieder vorwärtsspiegeln. Plätze mit bekannten Symbolen sind alle mit einer Zweierpotenz als Platznummer. Auf diesen steht immer ein „L“. Dieses Vorgehen erläutert man am Besten durch ein Beispiel (s.o.).

4. Unterrichtsvorschlag (Zum variierten Falten)

Angesprochene schulmathematische Themen

(elementare Zahlenfolgen)

Benötigte Materialien

Für jeden Schüler (oder je 2 Schüler) 5 Papierstreifen

Fragestellung

Gilt das Reflexionsgesetz auch dann, wenn wir beim Falten auch „rechts unter links“ zulassen?

Ablauf

Da nun zwei Arten des Faltens möglich sind, muss man sich zu Beginn eine Faltfolge vorgeben. Man beginnt am besten mit der alternierenden Faltfolge „über - unter - über - unter ...“. Die Schüler sollen die Papierstreifen falten, auseinander ziehen und die LR-Zeichenfolge notieren. Die Frage nach der richtigen Orientierung der Streifen soll bewusst offen bleiben, ggfs. schreiben die Schüler jeweils zwei LR-Folgen auf.

Das Protokoll ist:

1. Stufe:	L	
2. Stufe:	RLL	oder LRR
3.Stufe:	LRRLLLR	oder RLLRRRL
4.Stufe:	RLLRRRLLRLLLRRL	oder LRRLLLRRLRRRLLR
5.Stufe:	LRRLLLRRLRRRLLRLLRRLLLRLLRRRLLR	

Auswertung

Man kann gewisse Muster erkennen und durch Bedingungen ein modifiziertes Reflexionsgesetz retten. Wichtig soll in der Anfangsphase aber ein vertieftes Verständnis für das Reflexionsgesetz beim einfachen, reinen „über“-Falten sein. Erhalten bleibt hier bei jeder Faltfolge, dass in der Mitte immer dasselbe Symbol steht und die Zeichen einer LR-Folge dem Reflexionsprozess gehorchen.

Beispiel: 3. Stufe des oben stehenden Protokolls

L R R **L** L L R

Dagegen gilt nicht, dass der Anfang jeder LR-Folge eine Kopie der darüber stehenden ist.

Hier ist es wichtig, die Begründung am Faltvorgang selbst zu geben.

Beim letzten Auffalten wird die rechte Hälfte als Kopie der linkten Hälfte am mittleren Knick herausgeklappt. Somit ist es nicht verwunderlich, dass die zweite Hälfte des Papierstreifens eine antisymmetrische Kopie der ersten Hälfte ist. Das gilt für jede beliebige Faltfolge.

Beim alternierenden Falten „über - unter - über - unter ...“ gilt aber nicht das Bilden einer LR-Folge aus der vorhergehenden durch Kopieren des Anfangs, da der Doppelstreifen nicht demselben Faltprozess unterworfen wird wie der einfache Streifen. Das soll am obigen Beispiel des abwechselnden „über - unter - über - unter ...“-Faltens gezeigt werden.

Faltet man den einfachen Streifen z.B. vier Mal, so erfährt er die Faltungen „über - unter - über - unter“.

Stellt man mit dem ersten „über“ den Doppelstreifen her, so ist das erste „über“ der Faltfolge verbraucht und die weiteren Faltungen für den Doppelstreifen sind „unter - über - unter - über“. Das ist aber ein anderer Faltprozess als der für den Einfachstreifen. Folglich weist die erste Hälfte des Doppelstreifens ein anders Muster auf und ist nicht eine Kopie des einmal weniger geknickten Einfachstreifens.

Erweiterungen

An diese Betrachtung knüpfen zwei Erweiterungen an, die Haus- oder Forschungsaufgaben für leistungsstarke, interessierte Schüler ab Klasse 10 sein können.

Eine kleinere, aber anspruchsvolle Aufgabe, da der Zweierlogarithmus verwendet wird:

Programmieren Sie für das Rückwärtsspiegeln ein Rechenblatt, in das man die Platznummer eintragen kann und mit dem man das Rückwärtsspiegeln Schritt für Schritt verfolgen kann. Außerdem soll es das Symbol „L“ oder „R“ liefern, das auf diesem Platz steht.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Auf Platz	1215	steht ein	R		
3						
4	1215	10,2467406	11	2048	0	R
5	833	9,70217269	10	1024	1	
6	191	7,57742883	8	256	0	
7	65	6,02236781	7	128	1	
8	63	5,97727992	6	64	0	
9	1	0	0	1	1	
10	0	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
11	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
12	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
13	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
14	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
15	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
16	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
17	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
18	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
19	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
20	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	
21						

In Spalte B wird der Zweierlogarithmus der Zahl in Spalte A berechnet, in Spalte C aufgerundet und dann in D die nächst höhere Zweierpotenz für die Zahlen in Spalte A bestimmt.

Eine größere Forschungsaufgabe, die z.B. gut eine „Jugend Forscht"- oder Facharbeit sein kann:

Welche Platznummern eines Wortes müssen besonders selten oder häufig zurück gespiegelt werden, bis eine Zweierpotenz erreicht ist?

Oder genauer: Wie berechnet man aus einer Platznummer die Anzahl der notwendigen Rückwärtsspiegelungen bis zu einem Platz mit einer Zweierpotenz als Nummer?

Zwei Beispiele machen das Problem deutlich.

Platz Nr. 85

85 → 128 – 85 = 43

43 → 64 – 43 = 21

21 → 32 – 21 = 11

11 → 16 – 11 = 5

5 → 8 – 5 = 3

3 → 4 – 3 = 1 also insgesamt 6 Rechenschritte

Platz Nr. 70

70 → 128 – 70 = 58

58 → 64 – 58 = 6

6 → 8 – 6 = 2 also insgesamt 3 Rechenschritte

(Dieses Vorgehen erinnert ein wenig an das so genannte „$3N+1$"-Problem, auch Collatz- oder Ulam-Problem genannt. Dabei wird eine ungerade Zahl N durch $3N+1$ ersetzt, eine gerade durch $N/2$. Jeder praktisch durchgeführte Prozess endet in dem Zyklus 1 - 4 - 2- 1, doch bis heute steht ein allgemeiner Beweis aus. Eine kurze Darstellung dazu findet man in [M09], S42 ff. Ebenso wie im vorliegenden Problem wächst die Anzahl der Rechenschritte nicht einfach mit der Größe der Startzahl.)